POTENCIAÇÃO

PECEP • Matemática • Ciclo básico

Definição:

Quando temos um produto (multiplicação) de números reais iguais, ou seja, quando os fatores dessa multiplicação são iguais, podemos agrupá-los naquela base, com o expoente indicando a repetição desses fatores. Ex: 3x3x3x3 = 3^4

Seja a um número real e n um número natural. Potência de **base a** e **expoente n** é o número a^n tal que: $a^n = \underbrace{a.a.a.a....a}_{n}$

Ex: 5^1; 3^2; $(3.2)^2$; $(2/7)^2$; 0^7. Erro comum é considerar $3^2 = 6$

Bases negativas: verifica-se o expoente para saber o sinal do produto resultante:

Ex: $(-2)^3$; $(-5)^2$; $-(-3)^3$; $(-1)^{1983}$

Frações com mesma base: simplifica-se a expressão subtraindo o expoente do denominador. Ex: $(2^5) / (2^3) = (2.2.2.2.2) / (2.2.2) = 2^2$. Erro comum é tentar simplificar quando as bases são diferentes. $(2^5) / (3^3)$. Ex: $(7^{325}) / (7^{323})$; $(5^{(2)}) / (5^{(-6)})$.

Potência de potência: multiplicam-se as potências. Ex: $(2^3)^2 = (2^3).(2^3)$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ ou $n \neq 0$, então valem as seguintes propriedades:

[P₁] $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

[P₂] $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ e $m \geqslant n$

[P₃] $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, com $b \neq 0$ ou $n \neq 0$

[P₄] $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

[P₅] $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

5. Simplifique $(a^4 \cdot b^3)^3 \cdot (a^2 \cdot b)^2$.

Solução

$(a^4 \cdot b^3)^3 \cdot (a^2 \cdot b)^2 = (a^{4 \cdot 3} \cdot b^{3 \cdot 3}) \cdot (a^{2 \cdot 2} \cdot b^2) = a^{12} \cdot b^9 \cdot a^4 \cdot b^2 =$
$= a^{12+4} \cdot b^{9+2} = a^{16} \cdot b^{11}$

Potência de expoente inteiro negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo

$(2^2) / (2^5) = 1/ (2^3) = 2^{(-3)}$. Veja pelas propriedades acima.

Ex: $2^{(-1)}$; $2^{(-3)}$; $(-2)^{(-3)}$; $(1/3)^{(-2)}$

Frações com mesma base e mesmo expoente: $(a^3) / (a^3)$ $a^0 = 1$, para $a \neq 0$

RADICIAÇÃO

Definição:

Dados um número real $a \geqslant 0$ e um número natural *n*, $n \geqslant 1$, é demonstrável que existe sempre um número real positivo ou nulo *b* tal que $b^n = a$.

Ao número *b* chamaremos **raiz enésima aritmética** de *a* e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, em que *a* é chamado **radicando** e *n* é o **índice**.

Exemplos:

1º) $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$

2º) $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

3º) $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$

4º) $\sqrt[7]{0} = 0$ porque $0^7 = 0$

5º) $\sqrt[6]{1} = 1$ porque $1^6 = 1$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ para todo } a \geqslant 0.$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Interessante observar que é a operação inversa da potenciação. Qual o inverso multiplicativo de um número? Então ⟹

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

[R₁] $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$, para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$

[R₂] $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

[R₃] $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

[R₄] $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$

[R₅] $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

$$\text{para } b \geqslant 0, \quad b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n} \qquad 2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$$

Exercícios:

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$
$\sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^2} = 2^3 \cdot 3 = 24$
$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
$\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$
$\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3} = \dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{\dfrac{3}{2}} : \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{3}{2} \cdot 2} = \sqrt{3}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

Simplifique as raízes:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$

Resposta:

a) $\sqrt[3.2]{8.8} = \sqrt[6]{2^3.2^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt[3.2]{2^{2.2}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$