

TEORIA DOS CONJUNTOS

PECEP • Matemática • Ciclo básico

Definição:

A compreensão de *Conjuntos* é um dos pilares para o avanço no estudo da álgebra. Conceitos importantes para a Matemática, como *Funções* ou *Inequações*, dependem do domínio do conteúdo apresentado nesse módulo.

Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição, isto é, são consideradas noções primitivas:

- conjunto; • elemento; • pertinência entre elemento e conjunto.

De forma intuitiva, podemos definir conjuntos como a reunião de elementos, uma coleção bem definida.

Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é chamado elemento.

Tipologia:

Conjunto finito, infinito, unitário, vazio (\emptyset ou $\{ \}$) e Conjunto Universo (U) → É o conjunto de todos os elementos de determinado contexto.

Representação:

- **Listagem** Citando os elementos. Ex.: Conjunto A das cores primárias. → $A = \{\text{Vermelho}; \text{Amarelo}; \text{Azul}\}$. Essa notação também é empregada quando o conjunto é infinito: escrevemos alguns elementos que evidenciem a lei de formação e em seguida colocamos reticências. A mesma notação também é empregada quando o conjunto é finito com grande número de elementos:
- **Construtiva** Por meio de uma propriedade. Ex.: Conjunto C dos pares positivos. → $C = \{x | x \text{ tem a propriedade } P\}$
- **Gráfica** Diagrama de Euler-Venn.

Subconjunto:

Subconjunto de um conjunto é qualquer conjunto formado integralmente por elementos dele. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Ex.: Determine os subconjuntos do conjunto $E = \{x; y; z\}$.

$$\emptyset \{x\} \{y\} \{z\} \{x; y\} \{x; z\} \{y; z\} \{x; y; z\}$$

Conjunto das Partes:

É o conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto.

$$p(E) = \{\emptyset; \{x\}; \{y\}; \{z\}; \{x; y\}; \{x; z\}; \{y; z\}; \{x; y; z\}\}$$

Relações de Pertinência:

Relacionam elementos com conjuntos. São elas:

$$\in \rightarrow \text{“Pertence”}$$

$$\notin \rightarrow \text{“Não pertence”}$$

Ex.: Considerando o conjunto $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$. Podemos dizer que:

Relações de Inclusão:

Relacionam conjuntos com conjuntos. São elas:

$$\subset \rightarrow \text{“Está contido”}$$

$$\supset \rightarrow \text{“Contém”}$$

$$\not\subset \rightarrow \text{“Não está contido”}$$

$$\not\supset \rightarrow \text{“Não contém”}$$

Ex.: Considerando os conjuntos $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e $D = \{10; 11\}$. Podemos dizer, por exemplo, que: ...

Propriedades da inclusão:

Sendo A , B e C três conjuntos arbitrários, valem as seguintes propriedades:

$$1^{\text{a}}) \emptyset \subset A$$

$$2^{\text{a}}) A \subset A \text{ (reflexiva)}$$

$$3^{\text{a}}) (A \subset B \text{ e } B \subset A) \Rightarrow A = B \text{ (antissimétrica)}$$

$$4^{\text{a}}) (A \subset B \text{ e } B \subset C) \Rightarrow A \subset C \text{ (transitiva)}$$

Operações Entre Conjuntos

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\} \text{ União (U)}$$

Sendo A e B dois conjuntos, chamamos de $A \cup B$, e lemos “ A união B ”, o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B .

Ex.: Se $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ e $B = \{2; 3; 5; 7; 11\}$, determine $A \cup B$.

O conjunto $A \cup B$ será formado por todos os elementos que estão ou em A ou em B .

$$\text{Logo: } A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 11\}$$

$$1^{\text{a}}) A \cup A = A \text{ (idempotente)}$$

$$2^{\text{a}}) A \cup \emptyset = A \text{ (elemento neutro)}$$

$$3^{\text{a}}) A \cup B = B \cup A \text{ (comutativa)}$$

4ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

$A \cap B = \{x; x \in A \text{ e } x \in B\}$ **Interseção (\cap)**

Sendo A e B dois conjuntos, chamamos de $A \cap B$, e lemos “ A interseção B ”, o conjunto formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e B .

Ex.: Se $A = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$ e $B = \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11\}$, determine $A \cap B$.

O conjunto $A \cap B$ será formado por todos os elementos que estão em A e B ao mesmo tempo. Logo: $A \cap B = \{3 ; 5 ; 7\}$. Se for vazio: disjuntos. E $A \neq B$? É evidente que A é diferente de B se existe pelo menos um elemento de A não pertencente a B ou existe em B pelo menos um elemento não pertencente a A .

$A = B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ e $A \supset B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$

Exemplo: $\{a, b, d\} \neq \{a, b, c, d\}$. Diferentes? Disjuntos?

$A \cap U = A$ (elemento neutro)

$A - B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}$ **Diferença ($-$)**

Sendo A e B dois conjuntos, chamamos de $A - B$, e lemos “Diferença entre A e B ” ou “ A menos B ”, o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B .

Ex.: Se $A = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$ e $B = \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11\}$, determine $A - B$ e $B - A$.

$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

Complementar (C)

Sendo A e B dois conjuntos, com $B \subset A$, chamamos de C_A^B , e lemos “Complementar de B em relação a A ”, o conjunto de elementos que pertencem a A e não pertencem a B .

Ou seja:

$C_A^B = A - B$

$A^c = \bar{A} = U - A$

$C_A^A = \emptyset$

$C_A^\emptyset = A$

Número de Elementos da União de Dois Conjuntos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Ex.: Uma pesquisa realizada entre chocólatras apurou que 32 pessoas comem chocolates preto, 26 comem chocolate branco. Sabendo que 38 pessoas responderam a pesquisa, determine a quantidade de chocólatras que comem ambos os tipos de chocolate.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto dos Números Naturais (\mathbb{N}) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Conjunto dos Números Inteiros (\mathbb{Z}) $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Conjunto dos Números Racionais (\mathbb{Q}) $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^*\}$

Podemos notar também que todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração a/b e, portanto, representa um número racional.

Conjunto dos Números Irracionais (Γ ou $\bar{\mathbb{Q}}$) ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracionais): decimais não periódicos e não exatos: ex: $e \approx 2,718281828459045\dots$ ou $\pi \approx 3,1415\dots$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \Gamma$

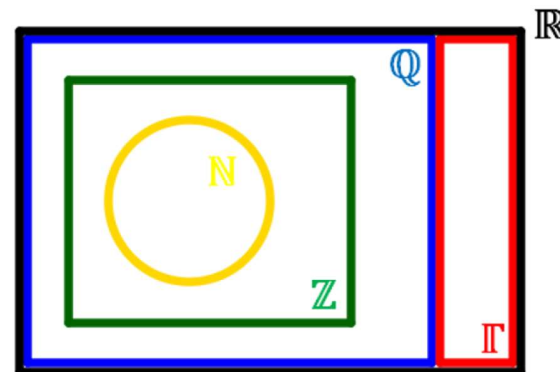
A origem histórica da necessidade de criação dos números irracionais está intimamente ligada com fatos de natureza geométrica e de natureza aritmética. Os de natureza geométrica podem ser ilustrados com o problema da medida da diagonal do quadrado quando a comparamos com o seu lado.

Todo número natural é inteiro, mas nem todo inteiro é natural.

Todo número inteiro ou natural é também racional, mas nem todo racional é inteiro ou natural.

Todo número racional ou irracional é real, assim como todo número real é ou racional ou irracional.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}$



Simbologia:

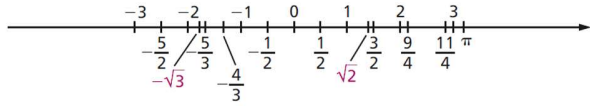
$\mathbb{N}^* = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots\} \rightarrow$ Naturais não nulos.

$\mathbb{Z}_+ = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots\} \rightarrow$ Inteiros não negativos.

$\mathbb{Z}_- = \{\dots; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1\} \rightarrow$ Inteiros negativos.

Intervalos Reais na reta real ou reta numérica:

Há pontos na reta que não representam necessariamente um racional, por exemplo. Porém, os Reais preenchem completamente a reta.



Nas extremidades do segmento: ● para representar um Intervalo Fechado e ○ para representar um Intervalo Aberto.

Ainda por notações, usaremos:

“[“ para representar um *Intervalo Fechado à Esquerda*.

“]“ para representar um *Intervalo Fechado à Direita*.

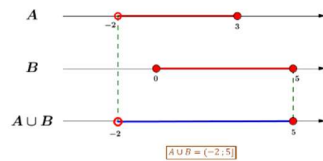
“(“ ou “)“ para representar um *Intervalo Aberto à Esquerda*.

“(“ ou “)“ para representar um *Intervalo Aberto à Direita*.

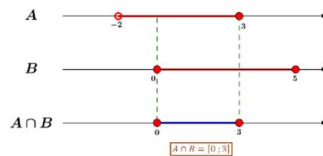
Operações com Intervalos

Como vimos, *Intervalos Reais* nada mais são do que representações de conjuntos contidos em \mathbb{R} . Sendo assim, valem para os intervalos as mesmas operações dos conjuntos. Considerando $A = (-2 ; 3]$ e $B = [0 ; 5]$, teremos:

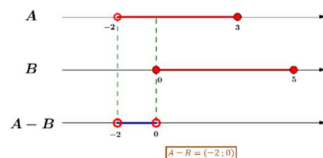
- União: será formada por todos os elementos que existem em A e todos que existem em B .



- Interseção: será formada por todos os elementos que existem em A e B simultaneamente.



- Diferença: será todos os elementos que pertencem a um conjunto que não pertencem ao outro.



OBS: Note que o ponto 0 está aberto duas vezes que ele pertence a ambos os conjuntos.