Sistemas lineares

Quando uma equação não basta

PECEP • Matemática • Ciclo básico

Nesta apostila, vamos começar com um problema concreto que se resolve com uma equação. Depois, vamos praticar e ver o que acontece quando o problema envolve duas quantidades desconhecidas — e por que, nesse caso, precisamos de mais informação.

Objetivos desta sequência

Ao final desta sequência, o aluno deverá ser capaz de:
- resolver equações do 1º grau com uma incógnita;
- entender por que uma equação com duas incógnitas não determina uma solução única;
- montar um sistema de duas equações a partir de um problema;
- resolver sistemas pelo método da substituição;
- resolver sistemas pelo método da adição;
- classificar um sistema como determinado, indeterminado ou impossível;
- interpretar problemas em contexto e traduzi-los em sistemas.

Parte 1 — Do mercado à equação

1.1 Um problema concreto

João foi ao mercado e comprou mussarela. O quilo custa R$8 e a sacola custou R$2. No caixa, ele pagou R$34. Quantos quilos João levou?

Se x é a quantidade de quilos:

$$8x + 2 = 34$$

$$8x = 32$$

$$x = 4$$

Conferindo: $8 \times 4 + 2 = 34$. Bateu. João comprou 4 quilos.

Para resolver, montamos uma equação do 1º grau e isolamos a incógnita. Essa mesma ideia resolve muitos problemas — desde que haja apenas uma quantidade desconhecida.

1.2 Praticando

Mais dois exemplos rápidos.

$2x + 3 = 11$, logo $2x = 8$ e $x = 4$. Conferindo: $2 \times 4 + 3 = 11$. ✓

Com distributiva: $3(x - 2) = 12$, logo $3x - 6 = 12$, $3x = 18$ e $x = 6$. Conferindo: $3(6 - 2) = 12$. ✓

Tente agora

Resolva no caderno:
1. $x + 5 = 12$
2. $2x - 3 = 7$
3. $5x - 7 = 18$
4. $3(x - 2) = 12$
5. $2(x + 1) - 3 = 7$

6. $4(x-1)+2x=20$

1.3 E se tiver duas letras?

Agora considere:

$$2x+3y=21$$

Tente resolver. O que acontece?

Se $x=0$: $3y=21$, logo $y=7$. Funciona.

Se $x=3$: $6+3y=21$, logo $y=5$. Também funciona.

Se $x=6$: $12+3y=21$, logo $y=3$. Também funciona.

Cada valor de x dá um y diferente. Com uma equação e duas incógnitas, existem infinitas respostas possíveis. Não dá para determinar uma solução única.

Ideia central

Uma equação com duas incógnitas não determina uma solução única. Para fechar a resposta, precisamos de mais informação.

Parte 2 — Duas incógnitas, duas equações

2.1 Voltando ao mercado

No dia seguinte, João voltou ao mercado. Dessa vez comprou mussarela e presunto. O quilo da mussarela custa R$8 e o do presunto custa R$6. Ele levou 5 quilos no total e pagou R$34.

Quantos quilos de mussarela e quantos de presunto João comprou?

Agora temos duas quantidades desconhecidas:

- x = quilos de mussarela
- y = quilos de presunto

A informação "5 quilos no total" dá:

$$x + y = 5$$

A informação "pagou R$34" dá:

$$8x + 6y = 34$$

As duas equações precisam valer **ao mesmo tempo**. Isso é um **sistema linear**.

O que é um sistema linear

Um sistema linear é um conjunto de duas (ou mais) equações que devem ser satisfeitas ao mesmo tempo pelas mesmas incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 8x + 6y = 34 \end{cases}$$

2.2 Resolvendo por substituição

Uma forma de resolver um sistema é o **método da substituição**:

1. Escolha uma das equações e isole uma das incógnitas.
2. Substitua essa expressão na outra equação.
3. Resolva a equação do 1º grau que aparece.
4. Volte e encontre a outra incógnita.

Vamos aplicar ao problema de João. Da primeira equação, isolamos y:

$$y = 5 - x$$

Substituímos na segunda equação:

$$8x + 6(5 - x) = 34$$

Abrindo os parênteses:

$$8x + 30 - 6x = 34$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

E $y = 5 - 2 = 3$.

João comprou 2 quilos de mussarela e 3 quilos de presunto.

Conferindo: $2 + 3 = 5$ e $8 \times 2 + 6 \times 3 = 16 + 18 = 34$. Bateu nas duas.

2.3 Mais um exemplo: variável já isolada

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

A primeira equação já dá y em função de x. Substituímos na segunda:

$$x + (2x + 1) = 7$$

$$3x + 1 = 7$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

E $y = 2 \times 2 + 1 = 5$.

Conferindo: $2 + 5 = 7$ e $5 = 2 \times 2 + 1$. Bateu nas duas.

2.4 Mais um exemplo: precisa isolar primeiro

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + 2y = 24 \end{cases}$$

Na primeira equação, isolamos y:

$$y = 10 - x$$

Substituímos na segunda:

$$3x + 2(10 - x) = 24$$

$$3x + 20 - 2x = 24$$

$$x = 4$$

E $y = 10 - 4 = 6$.

Conferindo: $4 + 6 = 10$ e $3 \times 4 + 2 \times 6 = 12 + 12 = 24$. Bateu.

> **Dica**
>
> Sempre confira a resposta nas **duas** equações. Se não bater em alguma, algo saiu errado.

2.5 Exercícios da Parte 2

Resolva por substituição:

1.

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

5. Maria comprou maçãs e bananas no mercado. O quilo da maçã custa R$6 e o da banana custa R$4. Ela levou 4 quilos no total e pagou R$20. Quantos quilos de maçã e quantos de banana ela comprou?

6. Em uma turma, há meninos e meninas. No total são 30 alunos. O número de meninas é o dobro do número de meninos. Quantos meninos e quantas meninas há na turma?

Parte 3 — Classificação de sistemas

3.1 Nem todo sistema tem uma solução única

Até agora, todos os sistemas que resolvemos tinham uma solução única. Mas nem sempre é assim. Existem três possibilidades.

Caso 1: uma solução (SPD)

SPD = sistema possível e determinado.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Somando: $3x = 6$, logo $x = 2$ e $y = 3$. Uma única solução.

Caso 2: infinitas soluções (SPI)

SPI = sistema possível e indeterminado.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

A segunda equação é o dobro da primeira. Se tentarmos resolver por substituição ($y = 5 - x$):

$$2x + 2(5 - x) = 10$$

$$2x + 10 - 2x = 10$$

$$10 = 10$$

Chegamos em algo verdadeiro, mas que não ajuda a encontrar x. Isso acontece porque a segunda equação não trouxe informação nova — ela apenas repetiu o que a primeira já dizia.

Qualquer par com $x + y = 5$ é solução: $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$...

Caso 3: nenhuma solução (SI)

SI = sistema impossível.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda da primeira:

$$0 = -3$$

Isso é falso. As duas equações se contradizem: $x + y$ não pode valer 5 e 8 ao mesmo tempo.

A intuição

Cada equação é uma informação sobre x e y.

- Se as duas informações são independentes: a resposta fica determinada (**SPD**).
- Se a segunda informação repete a primeira: continua sobrando infinitas respostas (**SPI**).
- Se as duas informações se contradizem: não existe resposta (**SI**).

3.2 Mais equações, mais informação?

Considere agora um sistema com três equações:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \\ 3x = 6 \end{cases}$$

Parece que temos informação de sobra. Mas some a primeira equação com a segunda:

$$(x + y) + (2x - y) = 5 + 1$$

$$3x = 6$$

A terceira equação é exatamente a soma das duas primeiras. Ela não traz informação nova — é uma consequência do que já sabíamos.

O sistema continua sendo SPD ($x = 2$, $y = 3$), mas a terceira equação é redundante. Dependência entre equações nem sempre é tão óbvia quanto “uma é o dobro da outra.”

3.3 Como reconhecer

Compare os coeficientes das duas equações. Se uma equação é proporcional à outra (ou seja, dá para obter uma multiplicando a outra por algum número), os dois casos especiais podem aparecer:

- Se os dois lados da equação acompanham a mesma proporção (incluindo o termo independente), o sistema é **SPI**.
- Se os coeficientes de x e y são proporcionais, mas o termo independente não acompanha, o sistema é **SI**.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

A segunda é $2 \times$ a primeira (coeficientes e termo independente). SPI.

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

Os coeficientes de x e y são proporcionais ($\times$ 2), mas $10 \neq 2 \times 6$. SI.

3.4 Exercícios da Parte 3

Classifique cada sistema como SPD, SPI ou SI. Se for SPD, resolva.

1.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 3y = 18 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Parte 4 — Método da adição

4.1 A ideia

Às vezes, isolar uma variável não é a forma mais prática. O método da adição tem outra estratégia: somar (ou subtrair) as equações de modo que uma das incógnitas desapareça.

Isso funciona porque, se duas igualdades valem ao mesmo tempo, podemos somá-las e a nova igualdade também vale. É a mesma ideia de sempre: fazer a mesma operação dos dois lados.

4.2 Exemplo: pronto para somar

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Na primeira equação aparece $+y$ e na segunda aparece $-y$. Se somarmos as duas equações:

$$(x + y) + (x - y) = 5 + 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

E $y = 5 - 3 = 2$.

4.3 Exemplo: subtrair uma da outra

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Nas duas equações aparece $+y$. Se subtrairmos a segunda da primeira:

$$(2x + y) - (x + y) = 11 - 7$$

$$x = 4$$

E $y = 7 - 4 = 3$.

Conferindo: $2 \times 4 + 3 = 11$ e $4 + 3 = 7$. Bateu.

4.4 Exemplo: multiplicar para alinhar

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

Nenhuma incógnita desaparece se somarmos ou subtrairmos direto. Mas podemos preparar o terreno.

Queremos eliminar o x. Multiplicamos a primeira equação por 3 e a segunda por 2:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 48 \\ 6x + 4y = 28 \end{cases}$$

Agora o x tem o mesmo coeficiente nas duas. Subtraímos a segunda da primeira:

$$5y = 20$$

$$y = 4$$

Voltando à primeira equação original:

$$2x + 3 \times 4 = 16$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Conferindo: $2 \times 2 + 3 \times 4 = 4 + 12 = 16$ e $3 \times 2 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14$. Bateu.

Quando usar qual método?

- Se uma variável já está isolada (ou é fácil isolar): **substituição**.
- Se os coeficientes já estão alinhados para cancelar: **adição**.
- Na dúvida, qualquer um dos dois funciona. São caminhos diferentes para a mesma resposta.

4.5 Erros comuns

Erro 1: esquecer de encontrar a segunda incógnita.

Resolver $x = 3$ e parar. Falta encontrar y!

Erro 2: erro de sinal ao subtrair equações.

Lembre que:

$$(2x + y) - (x + y) = 2x + y - x - y = x$$

O sinal de menos na frente do parênteses muda o sinal de todos os termos dentro dele — a mesma ideia que já apareceu na aula de distributiva.

Erro 3: multiplicar só um lado da equação.

Se multiplicamos uma equação por 3, **todos os termos** dos dois lados devem ser multiplicados por 3.

4.6 Exercícios da Parte 4

Resolva pelo método da adição:

1.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

Parte 5 — Problemas em contexto

5.1 Como montar o sistema

Em problemas de vestibular, o enunciado normalmente não dá as equações prontas. O trabalho é:

1. Identificar as incógnitas (o que o problema quer saber).
2. Traduzir cada informação do texto em uma equação.
3. Resolver o sistema.
4. Verificar se a resposta faz sentido no contexto.

5.2 Exemplo: idades

A soma das idades de Ana e Bruno é 40 anos. Ana tem 6 anos a mais que Bruno. Qual a idade de cada um?

Incógnitas: a = idade de Ana, b = idade de Bruno.

Primeira informação: $a + b = 40$

Segunda informação: $a = b + 6$

Sistema:

$$\begin{cases} a + b = 40 \\ a = b + 6 \end{cases}$$

Substituindo a segunda na primeira:

$$(b + 6) + b = 40$$

$$2b = 34$$

$$b = 17$$

E $a = 17 + 6 = 23$.

Ana tem 23 anos e Bruno tem 17.

5.3 Exemplo: vendas

Uma loja vende camisetas a R$25 e bonés a R$15. Em um dia, vendeu 20 peças e arrecadou R$400. Quantas camisetas e quantos bonés foram vendidos?

Incógnitas: c = camisetas, b = bonés.

$$\begin{cases} c + b = 20 \\ 25c + 15b = 400 \end{cases}$$

Da primeira: $b = 20 - c$.

$$25c + 15(20 - c) = 400$$

$$25c + 300 - 15c = 400$$

$$10c = 100$$

$$c = 10$$

E $b = 10$. Foram vendidas 10 camisetas e 10 bonés.

5.4 Exemplo: prova

Em uma prova, cada acerto vale 4 pontos e cada erro desconta 1 ponto. Um aluno respondeu 20 questões e obteve 50 pontos. Quantas questões ele acertou?

Incógnitas: a = acertos, e = erros.

$$\begin{cases} a + e = 20 \\ 4a - e = 50 \end{cases}$$

Somando as duas equações (o e desaparece):

$$5a = 70$$

$$a = 14$$

E $e = 6$. O aluno acertou 14 e errou 6.

Conferindo: $14 + 6 = 20$ e $4 \times 14 - 6 = 56 - 6 = 50$. Bateu.

5.5 Exercícios da Parte 5

1. A soma de dois números é 30 e a diferença é 8. Quais são os números?

2. Um estacionamento cobra R$10 para carros e R$6 para motos. Em um dia, entraram 50 veículos e o faturamento foi R$380. Quantos carros e quantas motos entraram?

3. Pedro comprou 2 cadernos e 1 caneta por R$13. Maria comprou 1 caderno e 3 canetas por R$14. Quanto custa cada caderno e cada caneta?

Revisão geral

Ideias que precisam ficar

- Uma equação com duas incógnitas tem infinitas soluções possíveis.
- Um sistema linear junta duas equações que devem valer ao mesmo tempo.
- Pelo método da substituição, isolamos uma incógnita e substituímos na outra equação.
- Pelo método da adição, somamos ou subtraímos as equações para eliminar uma incógnita.
- SPD: uma solução. SPI: infinitas (a segunda equação repete a primeira). SI: nenhuma (as equações se contradizem).
- Sempre confira a resposta nas duas equações.

Lista mista

1. Resolva por substituição:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

2. Resolva pelo método da adição:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

3. Classifique:

a)

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

4. A soma das idades de Carlos e Diana é 50 anos. Carlos tem 10 anos a mais que Diana. Qual a idade de cada um?

5. Uma padaria vende pão francês a R$1 e pão de queijo a R$3. Em uma manhã, vendeu 80 pães e arrecadou R$120. Quantos pães de cada tipo foram vendidos?

Gabarito

Parte 1

Tente agora:

1. $x = 7$
2. $x = 5$
3. $x = 5$
4. $x = 6$
5. $x = 4$
6. $x = 4$

Parte 2

1. $x = 3, y = 6$
2. $x = 8, y = 4$
3. $x = 4, y = 3$
4. $x = 3, y = 2$
5. Sistema: $\begin{cases} x+y=4 \\ 6x+4y=20 \end{cases}$. Solução: $x = 2$ kg de maçã e $y = 2$ kg de banana.
6. Sistema: $\begin{cases} m+f=30 \\ f=2m \end{cases}$. Solução: $m = 10$ meninos e $f = 20$ meninas.

Parte 3

1. SI
2. SPI
3. SPD: $x = 3, y = 2$
4. SPI

Parte 4

1. $x = 5, y = 3$
2. $x = 4, y = 2$
3. $x = 5, y = 2$
4. $x = 3, y = 4$

Parte 5

1. Os números são 19 e 11.
2. 20 carros e 30 motos.
3. Sistema: $\begin{cases} 2c+p=13 \\ c+3p=14 \end{cases}$. Caderno: R$5. Caneta: R$3.

Lista mista

1. $x = 2, y = 5$.
2. $x = 4, y = 1$.
3. - SPI
   - SI
4. Carlos tem 30 anos e Diana tem 20 anos.
5. 60 pães franceses e 20 pães de queijo.