Razões, proporções e regra de três direta

Da fração equivalente ao problema em contexto

PECEP • Matemática • Ciclo básico

Nesta apostila, vamos começar com algo que já apareceu antes: frações equivalentes.

A ideia é bem concreta:

- simplificar frações;
- ampliar frações;
- completar igualdades com um valor faltando.

Depois, vamos perceber que esse mesmo raciocínio aparece em problemas de razão, proporção e regra de três direta.

Ao longo deste material, vamos trabalhar apenas com **relações diretamente proporcionais**. Casos inversamente proporcionais e regra de três composta ficam para outro momento.

Objetivos desta sequência

Ao final desta sequência, o aluno deverá ser capaz de:

- lembrar que frações representam números;
- simplificar e ampliar frações sem mudar o valor;
- completar frações equivalentes com um valor faltando;
- resolver igualdades de frações mais difíceis usando MMC ou multiplicando os dois lados pela mesma coisa;
- perceber que uma mesma razão pode aparecer em contextos diferentes;
- aplicar esse raciocínio em problemas de regra de três direta.

Parte 1 - Frações equivalentes e buracos

1.1 Fração é número

Frações diferentes podem representar o mesmo número.

Por exemplo:

- $\frac{1}{2}$ vale 0,5
- $\frac{2}{4}$ vale 0,5
- $\frac{5}{10}$ vale 0,5

Ou seja: a escrita muda, mas o valor não muda.

Perguntas para abrir

- O que mudou de uma fração para a outra?
- O valor mudou?
- Como passar de $\frac{1}{2}$ para $\frac{2}{4}$?

1.2 Simplificar frações

Simplificar é dividir numerador e denominador pelo mesmo número.

Exemplos:

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

porque dividimos por 6 em cima e embaixo.

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

porque dividimos por 5 em cima e embaixo.

Quando fazemos a mesma coisa nos dois, a fração continua representando o mesmo número.

Tente agora

No caderno, simplifique:

- $\frac{14}{21}$
- $\frac{16}{24}$
- $\frac{27}{36}$

1.3 Ampliar frações

Ampliar é multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número.

Exemplos:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$$

Também podemos escrever:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$$

De novo, o valor não muda. Só muda a escrita.

Tente agora

Amplie:

- $\frac{1}{3}$ para denominador 12
- $\frac{2}{5}$ para denominador 15
- $\frac{3}{4}$ para denominador 20

Ideia central da parte

Para manter frações equivalentes, fazemos a mesma operação no numerador e no denominador.

1.4 Frações com buraco

Agora vamos usar a mesma ideia para completar igualdades.

Exemplo 1:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{x}$$

De 1 para 2, multiplicamos por 2.

Então, embaixo também multiplicamos por 2:

$$2 \times 2 = 4$$

Logo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

e:

$$x = 4$$

Exemplo 2:

$$\frac{4}{7} = \frac{x}{14}$$

De 7 para 14, multiplicamos por 2.

Então:

$$4 \times 2 = 8$$

Logo:

$$x = 8$$

Tente agora

Complete:

- $\frac{1}{3} = \frac{2}{?}$
- $\frac{5}{6} = \frac{?}{18}$
- $\frac{7}{10} = \frac{21}{?}$

1.5 Um caso mais cabeludo

Nem sempre o valor que falta aparece de cara.

Considere:

$$\frac{7}{12} = \frac{x}{18}$$

Uma forma de resolver é reescrever as duas frações com o mesmo denominador.

Como o MMC de 12 e 18 é 36, temos:

$$\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$$

e:

$$\frac{x}{18} = \frac{2x}{36}$$

Agora os denominadores são iguais. Então os numeradores também precisam ser iguais:

$$21 = 2x$$

Logo:

$$x = \frac{21}{2}$$

Isso mostra uma coisa importante: o valor que falta não precisa ser inteiro.

Pausa rápida

Reescreva com o denominador pedido:

- $\frac{5}{6}$ com denominador 24
- $\frac{3}{8}$ com denominador 24
- $\frac{7}{12}$ com denominador 36

1.6 Tirando o denominador que atrapalha

No mesmo exemplo:

$$\frac{7}{12} = \frac{x}{18}$$

também podemos multiplicar os dois lados por 18:

$$18 \times \frac{7}{12} = 18 \times \frac{x}{18}$$

No lado direito, o 18 de cima e o 18 de baixo se simplificam:

$$18 \times \frac{x}{18} = x$$

Então:

$$18 \times \frac{7}{12} = x$$

Simplificando:

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$x = \frac{3 \times 7}{2} = \frac{21}{2}$$

Mais tarde, isso vai aparecer como um método geral para resolver igualdades entre frações. Mas, por enquanto, a ideia importante é: **se multiplicamos os dois lados pela mesma coisa, a igualdade continua valendo**.

Tente agora

Resolva multiplicando os dois lados pela mesma coisa:

- $\frac{5}{6} = \frac{x}{12}$
- $\frac{3}{8} = \frac{x}{24}$
- $\frac{5}{12} = \frac{x}{18}$

1.7 Exercícios da Parte 1

1. Simplifique:
   - $\frac{8}{12}$
   - $\frac{15}{25}$
   - $\frac{18}{24}$
2. Amplie:
   - $\frac{1}{2}$ para denominador 8
   - $\frac{3}{5}$ para denominador 20

- $\frac{4}{7}$ para denominador 21

3. Complete:
   - $\frac{1}{2} = \frac{2}{?}$
   - $\frac{3}{4} = \frac{6}{?}$
   - $\frac{5}{8} = \frac{?}{16}$
   - $\frac{2}{3} = \frac{10}{?}$

4. Resolva:
   - $\frac{7}{12} = \frac{x}{36}$
   - $\frac{5}{6} = \frac{x}{18}$
   - $\frac{7}{12} = \frac{x}{18}$

Parte 2 - A mesma razão em contexto

2.1 Um carro a 60 km/h

Se um carro anda a 60 km/h, então:

- em 1 hora, ele anda 60 km;
- em 2 horas, ele anda 120 km;
- em 5 horas, ele anda 300 km;
- em meia hora, ele anda 30 km.

Pense por 1 minuto

Antes de olhar a conta, tente completar no caderno:

- 1 hora -> ?
- 2 horas -> ?
- 5 horas -> ?
- $\frac{1}{2}$ hora -> ?

O raciocínio aqui é puramente multiplicativo:

- 2 horas = 2 vezes 60 km
- 5 horas = 5 vezes 60 km
- meia hora = metade de 60 km

2.2 Agora com letra

Se um carro anda a x km/h, então:

- em 1 hora, ele anda x km;
- em 2 horas, ele anda $2x$ km;
- em 5 horas, ele anda $5x$ km;
- em $\frac{1}{2}$ hora, ele anda $\frac{x}{2}$ km.

Aqui, o fator que liga tempo e distância é a velocidade.

2.3 O mesmo pensamento ao contrário

Ainda com velocidade x km/h:

- se ele andou x km, passaram-se 1 hora;
- se ele andou $3x$ km, passaram-se 3 horas;
- se ele andou $7x$ km, passaram-se 7 horas;
- se ele andou $\frac{x}{3}$ km, passou-se $\frac{1}{3}$ de hora.

Esse quadro ajuda a enxergar a mesma relação dos dois lados.

2.4 A palavra proporção entra agora

No caso do carro a 60 km/h, podemos escrever:

$$\frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{300}{5}$$

As três frações representam a mesma razão.

Essa igualdade entre razões recebe o nome de **proporção**.

Mas, de novo, o principal não é o nome. O principal é perceber que a mesma relação está sendo mantida.

2.5 Outro exemplo visual

Se 3 kg de arroz custam 15 reais, então:

- 1 kg custa 5 reais;
- 2 kg custam 10 reais;
- 7 kg custam 35 reais.

Aqui, a relação continua a mesma: 5 reais por kg.

2.6 Exercícios da Parte 2

1. Complete:
   - 60 km/h -> 1 hora = ? km
   - 60 km/h -> 3 horas = ? km
   - 60 km/h -> $\frac{1}{2}$ hora = ? km
2. Se um carro anda a x km/h, complete:
   - 2 horas -> ? km
   - 7 horas -> ? km
   - $\frac{1}{3}$ de hora -> ? km
3. Complete:
   - 3 kg custam 15 reais -> 1 kg custa ? reais
   - 5 cadernos custam 20 reais -> 1 caderno custa ? reais
   - 4 caixas têm 28 garrafas -> 1 caixa tem ? garrafas
4. Escreva uma proporção:
   - 60 km em 1 hora e 300 km em 5 horas
   - 15 reais em 3 kg e 35 reais em 7 kg

Parte 3 - Regra de três direta

3.1 Onde a regra de três entra

Agora juntamos as duas ideias:

- igualdade de frações;
- mesma razão em um problema.

Exemplo:

Um carro percorre 120 km em 2 horas. Quantos quilômetros percorre em 5 horas, mantendo a mesma velocidade?

Escrevemos:

$$\frac{120}{2} = \frac{x}{5}$$

Isso significa: a razão distância/tempo continua sendo a mesma.

3.2 Resolvendo por simplificação e ampliação

No exemplo:

$$\frac{120}{2} = \frac{x}{5}$$

podemos simplificar o lado esquerdo:

$$\frac{120}{2} = \frac{60}{1}$$

Então:

$$\frac{60}{1} = \frac{x}{5}$$

Agora ampliamos a fração da esquerda para denominador 5:

$$\frac{60}{1} = \frac{300}{5}$$

Logo:

$$\frac{x}{5} = \frac{300}{5}$$

e:

$$x = 300$$

3.3 Outro exemplo

6 cadernos custam 21 reais. Quanto custam 10 cadernos?

Escrevemos:

$$\frac{21}{6} = \frac{x}{10}$$

Simplificando o lado esquerdo:

$$\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Agora ampliamos para denominador 10:

$$\frac{7}{2} = \frac{35}{10}$$

Logo:

$$\frac{x}{10} = \frac{35}{10}$$

e:

$$x = 35$$

3.4 Quando a conta não encaixa tão bonito

Às vezes, não é fácil chegar ao denominador desejado só por ampliação simples.

Nesses casos, podemos:

- usar o MMC para reescrever as frações;
- ou multiplicar os dois lados pela mesma coisa para tirar o denominador que atrapalha.

Exemplo:

$$\frac{7}{12} = \frac{x}{18}$$

Multiplicando os dois lados por 18:

$$18 \times \frac{7}{12} = x$$

Logo:

$$x = \frac{21}{2}$$

Esse mesmo raciocínio aparece em vários problemas de regra de três.

3.5 Exemplo em contexto

120 tijolos constroem 3 paredes iguais. Quantos tijolos são necessários para 5 paredes iguais?

Escrevemos:

$$\frac{120}{3} = \frac{x}{5}$$

Simplificando:

$$\frac{120}{3} = \frac{40}{1}$$

Ampliando para denominador 5:

$$\frac{40}{1} = \frac{200}{5}$$

Logo:

$$x = 200$$

3.6 Erros comuns

Erro 1: trocar a ordem das grandezas.

Se você começou com distância/tempo, precisa manter distância/tempo.

Erro 2: esquecer que a razão deve continuar a mesma.

Erro 3: aceitar uma resposta que não faz sentido.

Se a quantidade aumentou em uma relação direta, a outra grandeza também deve aumentar.

> **Resumo da ideia**
>
> Regra de três direta é manter a mesma razão entre duas grandezas.

3.7 Exercícios da Parte 3

1. Resolva:
   - 2 cadernos custam 8 reais. Quanto custam 5 cadernos?
   - 3 kg de fruta custam 18 reais. Quanto custam 5 kg?
   - Um carro percorre 150 km em 3 horas. Quantos quilômetros percorre em 8 horas?
2. Resolva:
   - 4 caixas têm 28 garrafas. Quantas garrafas há em 10 caixas?
   - 120 tijolos constroem 3 paredes iguais. Quantos tijolos constroem 7 paredes iguais?
3. Desafio:
   - $\frac{5}{12} = \frac{x}{18}$
   - 100 tijolos constroem 3 paredes iguais. Quantos tijolos constroem 5 paredes iguais?
4. Em cada caso, diga antes da conta se a resposta deve ser maior ou menor:
   - 15 reais por 3 kg. Quanto custam 10 kg?
   - 120 km em 2 horas. Quantos quilômetros em 1 hora?

Revisão geral

Ideias que precisam ficar

- Frações representam números.
- Simplificar e ampliar não mudam o valor da fração.
- Em frações equivalentes, fazemos a mesma operação em cima e embaixo.
- Razões iguais aparecem em frações equivalentes e também em problemas de contexto.
- Regra de três direta nasce da ideia de manter a mesma razão.
- Quando a conta fica mais difícil, podemos usar MMC ou multiplicar os dois lados pela mesma coisa.

Lista mista

1. Simplifique:
   - $\frac{18}{30}$
   - $\frac{21}{28}$
2. Complete:
   - $\frac{1}{2} = \frac{4}{?}$
   - $\frac{3}{5} = \frac{?}{20}$
   - $\frac{7}{12} = \frac{x}{36}$
3. Resolva:
   - 2 cadernos custam 8 reais. Quanto custam 7 cadernos?
   - 3 kg custam 15 reais. Quanto custam 9 kg?
   - Um carro anda a 60 km/h. Quantos quilômetros percorre em 4 horas?
   - 4 caixas têm 28 garrafas. Quantas garrafas há em 6 caixas?
4. Explique, com suas palavras, por que a ideia de fração equivalente ajuda a entender a regra de três direta.

Gabarito

Parte 1

Tente agora durante a explicação:

- simplificando: $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$, $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$, $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$
- ampliando: $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$
- completando: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$, $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$
- reescrevendo: $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$, $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, $\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$
- multiplicando os dois lados: $x = 10$, $x = 9$, $x = \frac{15}{2}$

1. Simplificando:
   - $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
   - $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$
   - $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

2. Ampliando:
   - $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$
   - $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$
   - $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$

3. Completando:
   - $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
   - $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$
   - $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$
   - $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

4. Respostas:
   - $x = 21$
   - $x = 15$
   - $x = \frac{21}{2}$

Parte 2

1. Respostas:
   - 60 km
   - 180 km
   - 30 km

2. Respostas:
   - $2x$
   - $7x$
   - $\frac{x}{3}$

3. Respostas:
   - 5 reais
   - 4 reais
   - 7 garrafas

4. Proporções possíveis:
   - $\frac{60}{1} = \frac{300}{5}$
   - $\frac{15}{3} = \frac{35}{7}$

Parte 3

1. Respostas:
   - 20 reais
   - 30 reais
   - 400 km

2. Respostas:

- 70 garrafas
- 280 tijolos

3. Desafio:
   - $x = \frac{15}{2}$
   - $x = \frac{500}{3}$
4. Antes da conta:
   - maior
   - menor

Lista mista

1. Simplificando:
   - $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$
   - $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$
2. Completando:
   - $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$
   - $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$
   - $x = 21$
3. Respostas:
   - 28 reais
   - 45 reais
   - 240 km
   - 42 garrafas
4. Resposta esperada: porque nos dois casos queremos manter a mesma razão. Na regra de três, a igualdade entre as frações representa a mesma relação entre as grandezas.