



Programa de
Capacitação
e Integração
de Lideranças
Sociais

GEOMETRIA

CIÊNCIAS EXATAS

Realização:



Patrocínio:

Integração
Metropolitana



APRESENTAÇÃO

As apostilas para pré-vestibulares populares, sociais e comunitários do **PECEP** (Projeto de Ensino Cultural e Educação Popular) foram produzidas no âmbito do **Programa de Capacitação e Integração de Lideranças Sociais**, projeto contemplado pelo edital Integra Rio, uma realização da Secretaria Especial de Integração Metropolitana (SEIM) e da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro.

Essas apostilas representam uma conquista coletiva dos cursinhos e educadores populares de todo o país, afinal, representam uma ferramenta concreta para a democratização do acesso ao material didático. Elas foram pensadas com carinho e compromisso para dialogar com a realidade das centenas de iniciativas populares espalhadas pelo Brasil e, também com aqueles que pensam em iniciar a luta de fundar o seu próprio pré-vestibular.

Sabemos que cada cursinho tem suas particularidades e dinâmicas próprias. Alguns, inclusive, elaboram seu próprio material didático. As apostilas do PECEP não têm como objetivo substituir esses esforços, muito menos propor uma padronização da prática pedagógica popular. Ao contrário, elas foram pensadas para que cursinhos, coletivos, educadores e líderes comunitários possam mitigar certas falhas aos quais podem estar suscetíveis.

Por exemplo, um professor de português que deseje iniciar um pré-vestibular, mas ainda não professores de outras áreas, pode usar essas apostilas como ponto de partida para que os estudantes não fiquem sem material de estudo. Da mesma forma, um educador que esteja começando a lecionar biologia, também pode usar as apostilas como material de apoio.

Importante ressaltar que tais apostilas foram elaboradas por voluntários de um pré-vestibular que funciona, de forma ininterrupta, há 25 anos na cidade do Rio de Janeiro. Ou seja, trazem em suas páginas o olhar atento e sensibilidade de quem está na linha de frente da luta por transformação através da educação.

Essas apostilas não tem a pretensão de serem uma solução definitiva. Elas são um passo importante em um caminho longo, penosos, porém, infinitamente recompensante.

Por fim, importante ressaltar que esta é a versão 2025 das nossas apostilas. A proposta é que esse material siga sendo desenvolvido e aprimorado de forma contínua, afinal, o aprendizado sobre o ensino popular não tem fim.

Se você tiver sugestões, críticas, dúvidas ou ideias, entre em contato com a gente pelo e-mail: **contato@pecep.org** e acompanhe as nossas redes sociais: **@pecep.org**

Com muito carinho,

A Direção do PECEP

PREFÁCIO

A Matemática faz parte da nossa vida de forma profunda e cotidiana. Está nas decisões que tomamos, nos problemas que resolvemos e nas estruturas que organizam o mundo em que vivemos. Aprender Matemática é, portanto, um ato de empoderamento — uma ferramenta que fortalece o pensamento lógico, a criticidade e a autonomia.

Esta apostila foi desenvolvida pelo PECEP (Projeto de Ensino Cultural e Educação Popular) com o objetivo de oferecer um material acessível, de qualidade e com foco nas necessidades dos estudantes de pré-vestibulares populares. Aqui, você encontrará conteúdos organizados de forma clara e progressiva, com explicações objetivas, exemplos resolvidos e uma ampla variedade de exercícios.

Mais do que decorar fórmulas, nosso compromisso é com a construção do conhecimento. Queremos que você compreenda os conceitos, veja sentido no que está aprendendo e se sinta capaz de enfrentar os desafios do vestibular — e da vida. Este material foi pensado com carinho e responsabilidade por quem acredita que a educação popular transforma realidades.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

— Paulo Freire

Agradecemos ao PCILS (Programa de Capacitação e Integração de Lideranças Sociais) e a Secretaria Municipal de Educação pelo apoio, confiança e parceria na luta por uma educação pública, gratuita, de qualidade e popular.

Assinam esta produção o professor:

Matheus Malvino

Desejo a você uma excelente jornada de estudos. Que esta apostila seja uma ferramenta útil na sua caminhada rumo ao conhecimento e à conquista dos seus objetivos.

Boa leitura e bons estudos!

SUMÁRIO

CICLO BÁSICO 5

- 1) CONJUNTOS NUMÉRICOS 6
- 2) OPERAÇÕES BÁSICAS MATEMÁTICAS 13
- 3) EXPRESSÕES NUMÉRICAS 22
- 4) FRAÇÃO 24
- 5) MMC E MDC 26
- 6) FATORAÇÃO 32
- 7) MÚLTIPLOS E DIVISORES 34
- 8) NÚMEROS DECIMAIS 38
- 9) DÍZIMAS PERIÓDICAS 42
- 10) RAZÕES E PROPORÇÕES 45
- 11) REGRA DE TRÊS 47
- 12) PORCENTAGEM 49
- 12) ESCALA 51
- 14) EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU 53
- 15) SISTEMA LINEARES 56
- 16) EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU 61

GEOMETRIA PLANA 64

- 1) RETAS 66
- 2) ÂNGULOS 68
- 3) POLÍGONOS 72
- 4) TRIÂNGULOS 77
- 5) SEMELHANÇA DE TRIÂNGULO 80
- 6) TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO 84
- 7) TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER 87
- 8) CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA 91
- 9) ÁREAS 94

GEOMETRIA ESPACIAL 96

- 1) POLIEDROS 97
- 2) POLIEDROS DE PLATÃO 99
- 3) POLIEDROS REGULARES E NÃO REGULARES 103
- 4) PRISMA 104
- 5) PIRÂMIDE 107
- 6) CILINDROS 111
- 7) CONES 114
- 8) ESFERA 117

CAPÍTULO I:

CICLO BÁSICO

1) CONJUNTOS NUMÉRICOS

Antes de resolver equações, fazer gráficos ou entender funções, é essencial conhecer os números com os quais trabalhamos. A Matemática, ao longo da história, foi criando diferentes tipos de números para resolver os problemas que surgiam nas civilizações. Esses diferentes tipos formam os chamados **conjuntos numéricos**.

Entender esses conjuntos é como montar uma base sólida para toda a matemática que vem depois.

Os números surgiram da necessidade prática dos povos antigos: contar rebanhos, medir terras, dividir alimentos, fazer comércio. Inicialmente, só existiam os **números naturais**, usados para contar objetos.

Com o tempo, problemas mais complexos surgiram:

- Como representar **dívidas**? (Surgem os **inteiros**)
- Como dividir algo entre pessoas? (Surgem os **racionais**)
- E quando a divisão não é exata, como a raiz quadrada de 2? (Surgem os **irracionais**)
- Juntos, racionais e irracionais formam os **reais**.
- E como resolver a raiz quadrada de um número negativo? (Surgem os **complexos**)

Cada novo conjunto de números ampliou os horizontes da Matemática, permitindo resolver mais tipos de problemas.

1.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é formado pelos números usados para contar e para ordenar elementos. É o primeiro conjunto numérico que aprendemos desde a infância.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

O zero (0) está incluído em $\mathbb{N}$, pois é usado para representar, uma quantidade nula.

Os demais elementos (1, 2, 3, ...) são chamados de números naturais positivos.

Em algumas situações o conjunto dos naturais sem o zero também é representado como:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Os números naturais são fundamentais para a contagem, classificação, algoritmos, estatísticas e estão na base de todas as outras construções numéricas. Eles são o ponto de partida da matemática formal.

1.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros, representado pela letra $\mathbb{Z}$, é uma ampliação do conjunto dos números naturais. Ele inclui todos os números naturais, ou seja:

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Mas vai além disso. Para representar situações de perda, déficit, ou abaixo de um ponto de referência, também precisamos dos inteiros negativos, como:

$$\{-1, -2, -3, \dots\}$$

Dessa forma, o conjunto $\mathbb{Z}$ é formado por números negativos, o zero e os positivos, sendo infinito em ambas as direções. Ou seja, não existe um menor nem um maior número — sempre há outro menor ou maior que ele.

O conjunto dos números inteiros tem um papel fundamental na Matemática e na nossa vida cotidiana. Ele surgiu para resolver problemas que o conjunto dos números naturais não conseguia representar — especialmente em situações que envolvem dívidas, perdas ou quantidades abaixo de zero. Os números inteiros permitem representar valores negativos, que aparecem frequentemente no dia a dia. Além disso, tornam possível a subtração entre quaisquer dois números naturais, mesmo quando o resultado é negativo. Dessa forma, os números inteiros são a base para conceitos de simetria na reta numérica, já que cada número positivo possui seu oposto negativo.

1.3 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de uma fração, onde o numerador e o denominador são números inteiros, e o denominador é diferente de zero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \right\}$$

onde:

- **a** é um número inteiro (positivos, negativos ou zero),
- **b** é um número inteiro diferente de zero ($b \neq 0$).

A Presença dos Números Racionais no Nosso Cotidiano

Como vimos os números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma de fração, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, etc. Eles estão em toda parte, nos ajudando a medir, calcular e tomar decisões. Vamos ver alguns exemplos práticos:

No supermercado

Ao comprar alimentos, é comum vermos quantidades fracionadas. Por exemplo, ao adquirir 1,5 kg de arroz, estamos utilizando um número racional. O mesmo vale para produtos com desconto, como uma mercadoria com 25% off, que corresponde a $\frac{1}{4}$ do preço original ou 0,25% em forma decimal.

Na cozinha

Medidas em receitas são repletas de números racionais. Um bolo pode pedir $\frac{1}{2}$ xícara de açúcar ou $\frac{3}{4}$ de colher de sal, exigindo precisão para um bom resultado. Até a temperatura do forno, como 180,5°C, é expressa em um número racional.

No dinheiro

Nos preços e transações financeiras, os racionais estão sempre presentes. Valores como R\$3,75 ou R\$0,50 de troco envolvem frações e decimais. Mesmo ao parcelar uma compra, como em 3x de R\$19,90, estamos utilizando esses números.

No tempo

Ao medir o tempo, também usamos números racionais. Por exemplo, meia hora pode ser escrita como 0,5 hora ou 30 minutos. Já um quarto de hora representa 0,25 hora ou 15 minutos — tudo isso são formas de representar partes de um todo.

Na matemática escolar e na ciência

Os números racionais são a base para muitos conteúdos importantes. Eles aparecem em frações, porcentagens, proporções e equações, além de serem essenciais para cálculos de área, interpretação de gráficos, medições e até em problemas de física e estatística.

Dessa maneira, os números racionais são essenciais para compreendermos o mundo ao nosso redor. Eles permitem representar partes de um todo, valores decimais, e relações de comparação, o que não é possível com os números inteiros.

Diferente dos naturais e inteiros, que lidam apenas com quantidades exatas, os racionais representam tudo aquilo que não é inteiro.

1.4 CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Os números irracionais são todos os números reais que não podem ser representados na forma de fração. Na forma decimal, são aqueles que não terminam e não apresentam repetição periódica. Em outras palavras, possuem infinitas casas decimais sem um padrão fixo. Além disso, os números irracionais são essenciais porque completam o conjunto dos números reais, permitindo representar medidas e grandezas que não podem ser expressas por frações exatas.

Representação Simbólica

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Os números irracionais podem parecer um conceito abstrato da matemática, mas eles estão presentes em diversas situações do nosso cotidiano e têm um papel fundamental em várias áreas do conhecimento.

Por exemplo, quando medimos a diagonal de um quadrado, o valor obtido não pode ser expresso como uma fração exata — ele é um número irracional. Essa medida é importante em construções, design e qualquer atividade que envolva formas geométricas.

Outro exemplo muito conhecido é a constante π (**pi**), que usamos para calcular o perímetro e a área de círculos. O valor de pi é irracional e aparece em diversas áreas da engenharia, arquitetura, física e tecnologia, sendo essencial para projetos que envolvem curvas e superfícies circulares.

Além disso, números irracionais aparecem em fenômenos naturais que envolvem **logaritmos** e **crescimento exponencial**, como o crescimento de populações, a propagação de vírus, ou até mesmo o decaimento radioativo. Esses processos são modelados matematicamente com números que possuem infinitas casas decimais e não repetitivas.

Assim, entender os números irracionais nos ajuda a compreender melhor o mundo ao nosso redor, desde as medidas simples do dia a dia até os fenômenos complexos da ciência e da tecnologia. Dessa maneira, entender os números irracionais nos ajuda a compreender melhor o mundo ao nosso redor, desde as medidas simples do cotidiano até os fenômenos complexos da ciência e da tecnologia.

1.5 CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS ($\mathbb{R}$)

O conjunto dos números reais, representado pela letra $\mathbb{R}$, é o conjunto que inclui todos os números que podem ser localizados na reta numérica, ou seja, todos os valores que podem ser utilizados para medir grandezas contínuas, como tempo, distância, massa, temperatura, entre outros.

1.5.1 SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ – Números Naturais

São os números usados para contar e ordenar.

$\mathbb{Z}$ – Números Inteiros

Incluem os naturais e também os negativos, usados para indicar dívidas, temperaturas abaixo de zero, entre outros.

$\mathbb{Q}$ – Números Racionais

São os números que podem ser escritos como fração entre dois inteiros.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – Números Irracionais

São números reais que não podem ser escritos como fração. Eles têm infinitas casas decimais que não se repetem.

Dessa forma, saber identificar os diferentes tipos de números dentro do conjunto dos números reais é fundamental para resolver várias questões comuns em provas de vestibular e do ENEM. Por exemplo:

- **Análise de gráficos:** para entender melhor o comportamento das funções e interpretar dados corretamente.
- **Equações e funções:** para saber quais números podem ser soluções e como manipulá-los.

- **Problemas de porcentagem, estatística, física e geometria:** áreas que usam muito os números racionais e irracionais para cálculos precisos.

Além disso, muitas questões pedem para o aluno **diferenciar números racionais, irracionais, inteiros, naturais**, entre outros. Dessa maneira, ter essa clareza facilita bastante a resolução dos exercícios e o entendimento dos conceitos.

O conjunto dos **números reais ($\mathbb{R}$)** é a base para quase toda a matemática usada em ciências, engenharia, economia, entre outras áreas. Ele abrange tanto os valores **discretos** (naturais, inteiros) quanto os **contínuos** (irracionais e decimais infinitos), oferecendo uma estrutura completa para o raciocínio matemático.

O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS NO COTIDIANO

Imagine que você está fazendo compras no supermercado. O preço dos produtos geralmente aparece em valores com casas decimais, como R\$ 4,99 ou R\$ 15,75 — esses são exemplos de números racionais, que fazem parte do conjunto dos números reais.

Ao pagar, você recebe troco, que pode ser um valor exato ou decimal, como R\$10,00 ou R\$3,25. Se o produto for parcelado, você pode dividir o valor total, por exemplo, R\$249,90 em 10 parcelas de R\$24,99. Aqui, estamos lidando com números reais porque envolvem frações e decimais.

Além disso, se você tiver um saldo negativo no banco, como R\$ –120,50, esse número também pertence aos números reais, mostrando que nem sempre lidamos apenas com valores positivos.

Agora, pense no tempo que você leva para ir da sua casa até a escola: pode ser 1,5 horas, que é o mesmo que 1 hora e 30 minutos — um número decimal real. Ou a temperatura do dia, que pode ser 25,6 °C ou até mesmo negativa no inverno, como –2,3 °C.

Esses exemplos mostram que o conjunto dos números reais está presente em muitas situações do nosso cotidiano, desde as finanças até o tempo e as medições ao nosso redor. Entender esses números ajuda a resolver problemas do dia a dia e facilita o estudo para o vestibular.

2) OPERAÇÕES BÁSICAS MATEMÁTICAS

As operações básicas são os cálculos fundamentais que usamos para trabalhar com números. Elas são a base para entender a matemática e resolver problemas no cotidiano. Existem 6 operações principais:

- Adição;
- Subtração;
- Multiplicação;
- Divisão;
- Potenciação;
- Radiciação.

Abaixo, veremos suas definições e algumas propriedades importantes que ajudam a entender como elas funcionam

2.1 ADIÇÃO (+)

Definição:

A **adição** é uma operação matemática básica que consiste em juntar dois ou mais números para obter um total ou uma soma.

Exemplo: $a + b = c$

Propriedades:

• **Comutativa:**

$$a + b = b + a$$

- A ordem dos números não altera o resultado.

• **Associativa:**

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

A maneira como os números são agrupados não altera o resultado.

- **Elemento neutro (Elemento identidade):**

$$a + 0 = a$$

O número zero não altera o valor da soma.

2.2 SUBTRAÇÃO (-)

Definição:

A **subtração** é uma operação matemática que consiste em retirar uma quantidade de outra, ou encontrar a diferença entre dois números.

Exemplo: $a - b = c$

Propriedades:

- **Não é comutativa:**

Geralmente, $a - b \neq b - a$

Trocar a ordem dos números **muda o resultado** da operação.

- **Não é associativa:**

Geralmente, $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

Mudar o agrupamento dos números também altera o resultado.

- **Elemento neutro:**

$$a - 0 = a$$

Existe um número que, ao ser subtraído, **não altera** o valor original. Esse número é zero.

2.3 MULTIPLICAÇÃO (× OU ·)

Definição:

A **multiplicação** é uma operação matemática que representa a soma repetida de um número por um determinado número de vezes.

Exemplo: $a \times b = c$

Propriedades:

●Comutativa:

$$a \times b = b \times a$$

A ordem dos fatores não altera o produto.

●Associativa:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

A forma como agrupamos os fatores não altera o produto

●Elemento neutro (Elemento identidade):

$$a \times 1 = a$$

Multiplicar um número por 1 não altera o valor desse número.

●Elemento absorvente:

$$a \times 0 = 0$$

Multiplicar qualquer número por zero resulta em zero.

●Distributiva em relação à adição:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Multiplicar um número pela soma de dois outros é o mesmo que multiplicar o número por cada parcela e depois somar os resultados.

2.4 DIVISÃO ($\div$ OU $/$)

Definição:

A **divisão** é a operação inversa da multiplicação, que consiste em dividir um número em partes iguais.

Exemplo: $a \div b = c$

Propriedades:

● Não é comutativa:

Geralmente, $a \div b \neq b \div a$

Trocar a ordem dos números muda o resultado.

● Divisão Não É Associativa

Geralmente, $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$

Agrupar os termos de formas diferentes muda o resultado.

● Elemento Neutro (divisão por 1)

$$a \div 1 = a$$

Qualquer número dividido por 1 continua sendo o mesmo.

● Divisão de Zero

Se zero é o numerador (em cima), o resultado é sempre zero (desde que o denominador não seja zero).

$$0 \div a = 0 ; (a \neq 0)$$

OBS: Se zero é o denominador (embaixo), a divisão não é possível.

$$a \div 0 = \text{indefinido}$$

● Divisão por Ela Mesma (exceto o zero)

Qualquer número (exceto o zero) dividido por ele mesmo é igual a 1.

$$a \div a = 1 ; (a \neq 0).$$

2.5 POTENCIAÇÃO

Definição:

A potenciação é uma operação matemática que representa a multiplicação de um número (a base) por ele mesmo várias vezes.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (\text{n vezes})$$

• **a** = base (número que será multiplicado)

• **n** = expoente (quantas vezes a base será multiplicada por ela mesma)

Propriedades:

2.5.1 Produto de potências com mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Soma os expoentes e mantém a base.

2.5.2 Quociente de potências com mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

Subtrai os expoentes e mantém a base.

2.5.3 Potência de uma potência

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Multiplica os expoentes e mantém a base.

2.5.4 Potência de um produto

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Distribui o expoente para cada fator.

2.5.5 Potência de um quociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

Aplica o expoente ao numerador e ao denominador.

2.5.6 Expoente zero

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Qualquer número diferente de zero elevado a 0 é 1.

2.5.7 Expoente 1

$$a^1 = a$$

Qualquer número elevado a 1 é ele mesmo.

2.5.8 Expoente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

Transforma em fração com expoente positivo.

2.6 RADICIAÇÃO

Definição:

A radiciação é a operação inversa da potenciação.

Ela busca descobrir qual número, elevado a um certo expoente, resulta em outro número.

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{se e somente se} \quad b^n = a$$

- **a** = radicando (número dentro do radical)
- **n** = índice da raiz (grau da raiz)
- **b** = raiz (resultado da operação)

Propriedades:

2.6.1 Raiz de um produto

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

A raiz de um produto é o produto das raízes.

2.6.2 Raiz de um quociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

A raiz de uma divisão é a divisão das raízes.

2.6.3 Radiciação de uma potência

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Transforma raiz em potência de expoente fracionário.

2.6.4 Raiz de raiz (radical de radical)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Multiplica os índices.

2.6.5 Raiz quadrada de número ao quadrado

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

O resultado é sempre positivo, pois a raiz quadrada representa o valor absoluto.

Agora que já conhecemos as seis operações básicas da matemática: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação e suas propriedades, é fundamental compreender como essas operações se relacionam dentro das expressões numéricas, próximo tema abordado.

3) EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Uma expressão numérica é a combinação de números e operações que devem ser resolvidas seguindo uma ordem específica, garantindo um resultado único e correto. Saber aplicar corretamente as operações básicas dentro dessas expressões é essencial para resolver problemas matemáticos com precisão e segurança. Essa ordem ajuda a garantir que todos cheguem ao mesmo resultado, mesmo que a expressão pareça complicada. Veja abaixo o passo a passo:

- **Parênteses ()**

Primeiro, resolvemos tudo o que estiver dentro dos parênteses.

- **Colchetes []**

Depois, resolvemos o que estiver dentro dos colchetes, se houver.

- **Chaves { }**

Em seguida, resolvemos as expressões dentro das chaves.

OBS: Caso uma expressão tenha parênteses dentro de colchetes ou chaves, siga sempre essa ordem: primeiro os parênteses, depois os colchetes e por último as chaves.

- **Potenciação e Radiciação**

Após resolver os símbolos, fazemos as potências (como 3^2) e as raízes (como $\sqrt{9}$).

- **Multiplicação e Divisão**

Em seguida, realizamos as multiplicações e divisões, na ordem em que aparecem, da esquerda para a direita.

- **Adição e Subtração**

Por fim, fazemos as adições e subtrações, também da esquerda para a direita.

Após o estudo da ordem correta das operações matemáticas, é fundamental realizar exercícios de fixação para consolidar o aprendizado sobre expressões numéricas.

Resolva as expressões numéricas abaixo:

$$\{[3 + (2 \times 4)] \div 2\} + 5 =$$

$$[(2^2 + 6) \div 2] + 1 =$$

$$\{(3 + 5) \times [6 - (2 + 1)]\} =$$

$$5 + \{12 \div [(3^2) - 6]\} =$$

$$\{[(4 + 6) \div 2] + 3^2\} \times 2 =$$

$$\{10 + [(2^3 + 1) \times 2]\} \div 3 =$$

$$\{[12 - (4 + 2)]^2 - 3\} \div 3 =$$

$$[(16 \div 4)^2 + \{3 \times (2 + 1)\}] - 5 =$$

$$\{2 \times [(3^2 + 1) \div 2]\} + 4 =$$

$$\{[(6 + 2)^2 - 10] \div 4\} + 1 =$$

$$\{(15 - 9) \times [(2 + 2)^2 - 4]\} \div 2 =$$

$$\left[(10 + 2)^2 \div 6 \right] - 8 =$$

$$(4^2 + 2) \div [3 + (1 + 2)] =$$

$$\{(5 + 3) \times [(2^2 + 2) \div 2]\} - 6 =$$

$$\{[2 + (4 \times 3)] - 5\} \div 5 =$$

4) FRAÇÕES

A **fração** é uma forma de representar partes de um todo. Quando dividimos algo em partes iguais, usamos a fração para indicar quantas partes estamos considerando. Uma fração é formada por dois números:

- **Numerador** (número de cima): indica **quantas partes estamos usando ou considerando**.
- **Denominador** (número de baixo): mostra **em quantas partes iguais o todo foi dividido**.

CLASSIFICAÇÕES DE FRAÇÕES:

- Frações próprias;
- Frações impróprias;
- Frações aparentes;
- Frações equivalentes.

4.1 Frações Próprias

Uma fração é chamada própria quando o numerador é menor que o denominador. Isso significa que ela representa uma parte menor que um inteiro.

$$\frac{2}{5}$$

Neste caso, 2 é menor que 5, então a fração é própria.

4.2 Frações Impróprias

As frações impróprias são aquelas em que o numerador é maior ou igual ao denominador, ou seja, elas representam um número igual ou maior que 1.

$$\frac{7}{4}$$

Como 7 é maior que 4, essa fração é imprópria.

4.3 Frações Aparentes

Uma fração é aparente quando ela representa um número inteiro, ou seja, quando o numerador é múltiplo exato do denominador.

$$\frac{6}{3} = 2$$

Aqui, 6 dividido por 3 é exatamente 2, portanto essa é uma fração aparente.

4.4 Frações Equivalentes

Frações equivalentes são aquelas que, mesmo sendo escritas com números diferentes, representam o mesmo valor.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Ambas representam metade de um todo, portanto são equivalentes.

Neste próximo tópico, vamos entender a importância das operações básicas da matemática: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, no estudo e no uso das frações. Essas operações são fundamentais não apenas para manipular frações corretamente, mas também para ampliar o raciocínio lógico e facilitar a resolução de problemas do cotidiano.

Compreender como realizar cada uma dessas operações com frações permite aplicar esse conhecimento em diversas situações, como na medida de ingredientes em receitas, na divisão de quantidades e em cálculos financeiros. Assim, dominar as operações básicas nas frações contribui para o desenvolvimento matemático e para a tomada de decisões mais seguras e precisas no dia a dia.

A adição e a subtração de frações exigem o conhecimento sobre o denominador comum, pois para somar ou subtrair partes é necessário que elas estejam divididas em unidades iguais. Esse conceito reforça a compreensão da equivalência entre frações e destaca a importância de encontrar o mínimo múltiplo comum (MMC).

5) MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

O MMC, ou Mínimo Múltiplo Comum, é um conceito fundamental na matemática. Ele representa o menor número inteiro positivo que é múltiplo comum de dois ou mais números. Em outras palavras, dado um conjunto de números, o MMC é o menor valor que pode ser dividido exatamente por todos eles, sem deixar resto.

Esse conceito é especialmente útil quando trabalhamos com frações, principalmente na hora de realizar adições ou subtrações entre frações com denominadores diferentes. Como não podemos somar ou subtrair diretamente frações com denominadores distintos, o MMC entra em cena como uma ferramenta essencial. Ele nos ajuda a transformar as frações em equivalentes com o mesmo denominador, permitindo que a operação seja feita corretamente.

Podemos pensar que, ao igualar os denominadores por meio do MMC, estamos fazendo com que todas as frações “falem a mesma língua” ou seja, que representem partes do mesmo todo. Isso facilita o cálculo e garante que o resultado seja preciso e coerente.

Dessa forma, aprender a calcular o MMC não é apenas um exercício matemático, porém uma habilidade essencial para o entendimento mais amplo da aritmética, especialmente no trabalho com frações.

Somar ou subtrair frações pode parecer complicado no início, mas fica fácil quando entendemos o papel do MMC (Mínimo Múltiplo Comum) nesse processo. O MMC nos ajuda a encontrar um denominador comum entre frações com denominadores diferentes, o que é essencial para realizar essas operações corretamente.

Imagine que você quer somar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$. Como os denominadores (3 e 4) são diferentes, não podemos somar diretamente. É como tentar juntar pedaços de pizzas cortadas em tamanhos diferentes, não faz sentido somar uma “parte de três” com uma “parte de quatro”. Antes, precisamos transformar essas frações para que todas tenham o mesmo “tipo de parte”.

Para isso, usamos o MMC dos denominadores. O MMC de 3 e 4 é 12. Com esse número, transformamos as duas frações em equivalentes com denominador 12:

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Agora que os denominadores são iguais, podemos somar:

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

O mesmo processo vale para a subtração. Por exemplo, para calcular $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$, encontramos o MMC de 6 e 4, que é 12:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Agora subtraímos:

$$\frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Dessa maneira, o MMC é uma ferramenta essencial para tornar os denominadores iguais, permitindo que somemos ou subtraímos os numeradores de forma correta. Com prática, esse processo se torna simples e muito útil no dia a dia, especialmente em situações que envolvem receitas, divisão de tempo, dinheiro e muito mais.

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES

As frações representam partes de um todo. Além de somar e subtrair frações, também podemos multiplicá-las e dividi-las e esses processos seguem regras simples, baseadas em propriedades da multiplicação e da divisão.

Multiplicação de Frações

Multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Divisão de Frações

Para dividir frações, usamos a propriedade do inverso multiplicativo (ou recíproco):

Multiplica-se a primeira fração pelo inverso (ou "fração invertida") da segunda.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemplo:

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$$

MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

O MDC, ou Máximo Divisor Comum, é um conceito fundamental na matemática que ajuda a identificar o maior número inteiro positivo capaz de dividir dois ou mais números, sem deixar o resto.

Em outras palavras, o MDC é o maior divisor que todos os números em questão têm em comum. Por exemplo, ao trabalhar com frações, o MDC pode ser usado para simplificar as frações, tornando-as mais fáceis de entender e operar.

Saber encontrar o MDC é importante para diversas aplicações no dia a dia, como na divisão de objetos ou quantidades em partes iguais, garantindo que as divisões sejam justas e sem sobras.

Uma característica importante do MDC é que ele sempre é menor ou igual ao menor dos dois números. Por exemplo, ao calcular o MDC de 12 e 18, temos:

$$MDC(12, 18) \leq 12$$

Outro caso frequente ocorre quando um número divide exatamente o outro. Nessa situação, o MDC é exatamente o menor número entre eles. Por exemplo:

$$MDC(8, 24) = 8$$

pois 8 divide 24 perfeitamente.

Além disso, quando o MDC de dois números é igual a 1, dizemos que esses números são **primos entre si** ou **coprimos**. Isso significa que eles não têm nenhum divisor comum, exceto o número 1. Por exemplo:

$$MDC(8, 15) = 1 \rightarrow 8 \text{ e } 15 \text{ são primos entre si}$$

O MDC também é muito útil para **simplificar frações**. Ao dividir o numerador e o denominador pelo MDC, obtemos uma fração equivalente, porém mais simples. Por exemplo, para a fração 18/24:

$$\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}$$

onde 6 é o MDC de 18 e 24.

Uma propriedade importante do MDC em relação a múltiplos é a seguinte: se um número a pode ser escrito como o produto de dois números, $a = b \times c$, então vale que

$$MDC(a, b) = MDC(b \times c, b) = b \times MDC(c, 1) = b$$

Na prática, isso significa que se um número é múltiplo do outro, o MDC será sempre o menor deles.

Compreender essas propriedades do MDC facilita a resolução de problemas matemáticos, especialmente em situações envolvendo frações, divisões e agrupamentos, tornando os cálculos mais eficientes e claros.

EXERCÍCIOS DE MDC

1. Calcule o MDC de:

- a) 12 e 18
- b) 24 e 36
- c) 15 e 25
- d) 7 e 13
- e) 48 e 60

2. Calcule o MDC dos números abaixo:

- a) 20, 30 e 50
- b) 45, 60 e 75
- c) 8, 12 e 20
- d) 9, 28 e 35
- e) 16, 24 e 40

3. Simplifique as frações usando o MDC:

- a) $\frac{24}{36}$
- b) $\frac{18}{27}$
- c) $\frac{42}{56}$
- d) $\frac{30}{45}$
- e) $\frac{50}{100}$

6) FATORAÇÃO

Fatoração é o processo de escrever um número ou uma expressão algébrica como um produto de fatores, geralmente primos ou expressões mais simples.

A seguir, veremos por meio de exemplos como funciona o processo de fatoração, compreendendo suas etapas e aplicações na resolução de problemas.

Exemplo:

Fatorar 60:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Aqui, 60 foi decomposto em um produto de números primos.

Fatorar a expressão:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

Essa é uma fatoração de diferença de quadrados.

PROPRIEDADES DE FATORAÇÃO:

- **Para números inteiros**

Todo número inteiro positivo maior que 1 pode ser decomposto de forma única (salvo a ordem) em fatores primos.

- **A fatoração é usada para:**

Encontrar divisores
Calcular o MMC e MDC
Verificar divisibilidade

- **Para expressões algébricas:**

Produto notável:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

- **Colocar fator comum em evidência:**

$$3x + 6 = 3(x + 2)$$

Trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Trinômio do tipo $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorado por técnicas como agrupamento ou fórmula de Bhaskara.

A fatoração é uma ferramenta fundamental na álgebra e tem um papel crucial na simplificação de expressões, resolução de equações e no estudo de funções. Por meio da fatoração, é possível reescrever expressões algébricas em formas mais simples, o que facilita a análise e a resolução de problemas matemáticos mais complexos

7) MÚLTIPLOS E DIVISORES

Neste tópico, iniciaremos o estudo dos múltiplos, explorando suas propriedades e aplicações em contextos matemáticos. Em seguida, abordaremos os divisores, aprofundando a compreensão de suas características e usos.

7.1 DEFINIÇÃO DE MÚLTIPLOS

Sejam a e b dois números inteiros. Dizemos que:

$$a \text{ é múltiplo de } b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = b \cdot k$$

Ou seja,

um número a é múltiplo de b se existe um número inteiro k tal que a multiplicação de b por k resulta em a .

- 18 é múltiplo de 6 porque existe $k = 3$ tal que:

$$18 = 6 \cdot 3$$

- 0 é múltiplo de qualquer inteiro b , pois:

$$0 = b \cdot 0$$

- 7 não é múltiplo de 3, pois não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3 \cdot k = 7$

Conjunto dos múltiplos de b :

$$M(b) = \{b \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Por exemplo:

$$M(4) = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$$

Agora que revisamos os conceitos, propriedades e aplicações dos múltiplos, é hora de colocar o conhecimento em prática. A seguir, iremos encontrar uma série de exercícios que vão ajudá-lo a fixar o conteúdo e a desenvolver habilidades essenciais para resolver questões envolvendo múltiplos, como as que costumam aparecer em vestibulares.

RESOLVA OS EXERCÍCIOS ABAIXO:

- 1) Qual é o menor número inteiro positivo que é múltiplo simultâneo de 3, 4, 6, 8 e 9?
- 2) Três semáforos piscam juntos em um cruzamento às 6h. O primeiro pisca a cada 30 segundos, o segundo a cada 40 segundos, e o terceiro a cada 50 segundos. A que horas eles voltarão a piscar juntos novamente?
- 3) Um atleta treina a cada 5 dias, outro a cada 7 dias e outro a cada 10 dias. Se eles treinaram juntos no dia 1º de janeiro, em que data do ano voltarão a treinar juntos pela primeira vez?
- 4) Qual é o menor número de três algarismos que é múltiplo de 12, 15 e 18?
- 5) Quantos números naturais de três algarismos são múltiplos de 9 e 12 ao mesmo tempo?
- 6) Uma fábrica quer empacotar 600 peças em caixas que contenham a mesma quantidade de peças e que não sobre nenhuma. Quais são as quantidades mínimas de peças por caixa possíveis, se as caixas devem conter no mínimo 20 peças cada uma e o número de peças por caixa deve ser um múltiplo de 25?
- 7) Calcule a soma de todos os múltiplos de 6 entre 100 e 300.

- 8) Um ônibus passa por um ponto a cada 12 minutos. Outro ônibus passa a cada 18 minutos. Se os dois passaram juntos às 14h, que horas será a próxima vez que passarão juntos?
- 9) Encontre todos os múltiplos de 8 entre 100 e 200 que não são múltiplos de 6.

7.2 DEFINIÇÃO DE DIVISORES

Sejam dois números inteiros a e b , com $b \neq 0$.

$$B \div A = k \quad (\text{com } k \text{ inteiro e resto zero})$$

Dizemos que a é divisor de b se existe um número inteiro k tal que:

a divide b sem deixar resto, ou seja, a divisão é exata.

1. Divisor e múltiplo são conceitos opostos:

$$a \mid b \iff b \text{ é múltiplo de } a$$

2. O número 1 é divisor de qualquer número inteiro.
3. Todo número é divisor de si mesmo.

$$a \mid a$$

4. O número zero (000) é divisível por qualquer número diferente de zero:

$$a \mid 0, \quad \text{se } a \neq 0$$

5. Nenhum número pode ser dividido por zero, pois o resultado é indeterminado.
6. Um número primo tem exatamente dois divisores: 1 e ele mesmo.
7. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$ (propriedade transitiva).
8. O número de divisores de um número n depende da sua fatoração em primos.

8) NÚMEROS DECIMAIS

Definição de Números Decimais:

Números decimais são números que possuem uma parte inteira e uma parte fracionária, separadas por uma vírgula. Eles representam valores que não são inteiros, permitindo expressar frações de uma unidade.

Exemplo:

- **3,75** → Parte inteira: 3 / Parte decimal: 75
- Isso significa: 3 unidades + 75 centésimos (ou seja, 75/100)

Estrutura de um número decimal:

Parte inteira, vírgula, parte decimal

- Exemplo: **12,5** = 12 unidades + 5 décimos
- Exemplo: **0,25** = 25 centésimos

Usos comuns:

Medidas (altura, peso, distância)

Dinheiro (R\$ 4,99)

Notas e médias escolares (7,5).

Os números decimais fazem parte da nossa rotina e estão presentes em diversas situações do dia a dia. Lidamos com eles quando vamos ao mercado e vemos o preço de um produto, como R\$2,50, ou quando seguimos uma receita que pede 0,5 litro de leite. Também aparecem ao medir tempo em esportes, ao calcular distâncias percorridas e até mesmo ao verificar as notas escolares, como uma média de 7,8.

Esses números são fundamentais para garantir precisão nos cálculos e auxiliar em tarefas simples e importantes, como fazer compras, cozinhar, organizar treinos esportivos e avaliar o desempenho escolar.

Além disso, é por meio das operações básicas da matemática: adição, subtração, multiplicação e divisão, que conseguimos resolver problemas práticos envolvendo números decimais. Saber utilizar essas operações com decimais nos ajuda a tomar decisões mais corretas e conscientes.

8.1 Adição com números decimais

Alinhe as vírgulas e some como números inteiros, da direita para a esquerda.

Exemplo:

Você tem R\$5,50 e ganha R\$2,75 do seu amigo.

Total:

$$\begin{array}{r} 5,50 \\ + 2,75 \\ \hline 8,25 \end{array}$$

Você tem um total de R\$8,25.

OBS: some as partes decimais com as partes decimais e as partes inteiras com as partes inteiras. Isto é recíproco na subtração também.

8.2 Subtração com números decimais

Alinhe as vírgulas e subtraia como números.

$$\begin{array}{r} 20,00 \\ -12,45 \\ \hline 7,55 \end{array}$$

Você ficou com R\$7,55.

8.3 Multiplicação com números decimais

Para multiplicar números decimais, seguimos três passos simples:

- Ignoramos momentaneamente as vírgulas e multiplicamos os números como se fossem inteiros.
- Contamos o total de casas decimais dos dois fatores.
- Posicionamos a vírgula no produto final, contando da direita para a esquerda, de acordo com o número total de casas decimais.

Exemplo:

Multiplicando $2,4 \times 1,3$, temos:

Sem a vírgula: $24 \times 13 = 312$

Casas decimais: $1 + 1 = 2$

Resultado: 3,12

Dessa forma, $2,4 \times 1,3 = 3,12$

Essa operação utiliza propriedades importantes da multiplicação, como:

Comutativa: a ordem dos fatores não altera o produto.

Associativa: podemos agrupar os fatores de diferentes formas.

Distributiva: a multiplicação pode ser distribuída sobre a adição.

8.4 **Divisão de números decimais**

Dividir números decimais também é simples, desde que se use uma técnica estratégica: eliminar a vírgula do divisor.

Para isso, multiplicamos tanto o divisor quanto o dividendo por uma potência de 10 (10, 100, 1000...) até que o divisor se torne um número inteiro. Em seguida, realizamos a divisão normalmente.

Exemplo:

Para resolver $4,2 \div 0,6$, multiplicamos os dois números por 10:

$$\frac{4,2 \times 10}{0,6 \times 10} = \frac{42}{6} = 7$$

Exemplo: $1,25 \div 0,05$, O divisor tem duas casas decimais, então multiplique os dois por 100:

$$\frac{1,25 \times 100}{0,05 \times 100} = \frac{125}{5}$$

9) DÍZIMAS PERIÓDICAS

Dízimas periódicas são números decimais infinitos em que uma ou mais casas decimais se repetem indefinidamente em um padrão fixo. Por exemplo, no número $0,3333 \dots$, o algarismo 3 se repete continuamente, caracterizando uma dízima periódica simples. Já em números como $0,142857142857\dots$, o grupo de algarismos 142857 se repete, formando uma dízima periódica composta.

Propriedades:

Periodicidade: O trecho que se repete é chamado de período, podendo ser simples (um único algarismo) ou composto (vários algarismos).

Conversão para fração: Existem métodos algébricos para transformar dízimas periódicas em frações exatas, que envolvem a criação de equações para eliminar a parte periódica infinita.

Representação como fração: Toda dízima periódica representa um número racional, ou seja, pode ser expressa como uma fração.

Aplicações das dízimas:

As dízimas periódicas são muito importantes para a compreensão e o trabalho com os números racionais, que são aqueles expressos por frações. Elas aparecem frequentemente em diversas áreas, como nos cálculos financeiros, na ciência e na programação, onde números decimais infinitos e periódicos são comuns.

No âmbito financeiro, por exemplo, as dízimas periódicas surgem em situações como o cálculo de juros, prestações e parcelas, pois esses cálculos envolvem divisões que resultam em números decimais infinitos periódicos. Além disso, em medições e conversões de unidades, também é comum encontrar dízimas periódicas. Ao converter frações para números decimais ou vice-versa, algumas dessas representações resultam em dízimas, que precisam ser compreendidas para garantir a precisão dos valores obtidos.

Na matemática, todo número racional pode ser representado como uma dízima periódica ou um decimal finito. Isso mostra que as dízimas periódicas são uma forma natural e comum de

expressar frações, o que torna seu estudo fundamental para entender melhor o sistema numérico.

Agora iremos aprender um passo a passo bastante importante. Como converter uma dízima periódica em fração.

9.1 Dízima periódica simples:

Exemplo: $0,3\overline{=}$ $0,3333\dots$

Passo a passo:

Seja $x = 0,3333\dots$

Multiplique x por 10 (porque o período tem 1 dígito):

$$10x = 3,3333\dots$$

Subtraia a primeira equação da segunda:

$$10x - x = 3,3333\dots - 0,3333\dots$$

$$9x = 3$$

Resolva para x :

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

9.2 Dízima periódica composta

Exemplo: $0,123\overline{=}$ $0,1232323\dots$

Passo a passo:

Seja $x = 0,1232323\dots$

Identifique parte não periódica (antes do período começar): “1” (1 dígito)

Período: “23” (2 dígitos)

Multiplique x por 10^{n+p} , onde:

n = número de dígitos da parte não periódica (1)

p = número de dígitos do período (2)

$$10^{1+2} = 10^3 = 1000$$

$$1000x = 123,2323\dots$$

Multiplique x por $10^n = 10^1 = 10$: Subtraia as duas expressões:

$$10x = 1,2323...$$

$$1000x - 10x = 123,2323... - 1,2323...$$

$$990x = 122$$

Resolva para x :

$$x = \frac{122}{990}$$

Simplifique a fração, se possível.

Resumo da fórmula para dízimas periódicas compostas:

$$x = \frac{\text{Número formado pela parte não periódica} + \text{período} - \text{Número formado pela parte não periódica}}{10^{n+p} - 10^n}$$

10) RAZÕES E PROPORÇÕES

A razão é a comparação entre dois números ou grandezas, expressa na forma de uma divisão. Ela indica quantas vezes uma quantidade contém a outra ou a relação entre elas. Já a proporção ocorre quando há a igualdade entre duas razões. Em outras palavras, uma proporção mostra que duas comparações diferentes mantêm a mesma relação. Esses conceitos são fundamentais na matemática, sendo amplamente utilizados para resolver problemas envolvendo escalas, porcentagens e regras de três.

Razão

Exemplo:

Se João tem 10 balas
quantidade de balas de

e Ana tem 5, a razão entre a
João e Ana é:

$$\text{Razão} = \frac{10}{5} = 2$$

Ou seja, João tem o dobro de balas que Ana.

Proporção

Exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Essa igualdade mostra uma proporção: os dois pares de números estão na mesma relação.

Propriedades das Proporções

1. Produto dos meios é igual ao produto dos extremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

1. Se duas proporções têm um termo em comum, elas podem ser combinadas:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$$

2. Inversão:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

As razões e proporções são amplamente usadas em diversas áreas, como:

Matemática Financeira - Juros simples e compostos, porcentagens, descontos.

Escala em Mapas e Plantas - Exemplo: A escala 1:100 significa que 1 cm no papel equivale a 100 cm na realidade.

Receitas Culinárias - Proporções de ingredientes (ex: 2 xícaras de farinha para 1 de açúcar).

Conversões de Unidades - Km para metros, horas para minutos, etc.

Estatísticas e Gráficos - Comparações de dados e relações entre variáveis.

Regra de Três - Usada para resolver problemas de proporcionalidade direta ou inversa.

11) REGRA DE TRÊS

A Regra de três é um método matemático prático e bastante utilizado para resolver situações que envolvem proporcionalidade entre valores. Ela permite encontrar um valor desconhecido a partir da relação entre outros três valores conhecidos, formando uma proporção. Esse recurso é amplamente aplicado no cotidiano, em situações como cálculos de escalas, receitas culinárias, porcentagens, velocidade, tempo, entre outros.

A Regra de três pode ser classificada em dois tipos: simples e composta. A regra de três Simples é utilizada quando o problema envolve apenas duas grandezas. Já a Regra de três Compostas é empregada quando há três ou mais grandezas relacionadas. Em ambos os casos, a técnica é uma ferramenta eficiente para resolver problemas de forma rápida e lógica.

Propriedade

A base da Regra de 3 é a proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas.

Regra de 3 Simples Direta

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma, a outra também aumenta na mesma proporção.

Exemplo:

Se 2 camisetas custam R\$40, quanto custam 5 camisetas?

Camisetas	Preço R\$
2	40
5	x

Proporção direta:

$$2 : 5 = 40 : x \Rightarrow x = \frac{5 \times 40}{2} = 100$$

Regra de 3 Simples Inversa

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma, a outra diminui na mesma proporção.

Exemplo:

Se 4 pessoas fazem um trabalho em 6 dias, quantos dias levarão 8 pessoas para fazer o mesmo trabalho?

Pessoas	Dias
4	6
8	x

Proporção inversa:

$$4 \times 6 = 8 \times x \Rightarrow x = \frac{4 \times 6}{8} = 3$$

IMPORTÂNCIA DA REGRA DE TRÊS

Seu principal objetivo é resolver problemas que envolvem proporcionalidade, permitindo calcular valores desconhecidos a partir de outros já conhecidos. Um exemplo comum de aplicação está nas receitas culinárias, onde é necessário ajustar as quantidades dos ingredientes de acordo com o número de porções desejado.

Ela também é muito útil na conversão de medidas, como transformar quilômetros em milhas, converter unidades de tempo ou massa, entre outras. No campo das finanças, a Regra de 3 é aplicada em projeções de custo, cálculos de descontos e juros simples.

Além disso, é fundamental na leitura de escalas e mapas, ajudando a determinar distâncias reais com base em representações proporcionais. No estudo da velocidade média, ela auxilia no cálculo do tempo ou da distância percorrida. Na engenharia e na física, a Regra de três é usada para relacionar grandezas como força, massa e tempo, contribuindo para análises e soluções técnicas mais precisas.

12) PORCENTAGEM

Porcentagem é uma forma de expressar uma razão ou proporção em relação a 100. O símbolo usado é %, e a palavra vem do latim *per centum*, que significa "por cem".

PROPRIEDADES DA PORCENTAGEM

1. Equivalência com fração e número decimal:

- $50\% = 50/100 = 0,5$
- $10\% = 10/100 = 0,1$

2. Porcentagem de uma quantidade:

- Para calcular x% de um valor, multiplica-se o valor por x/100.
- Exemplo: 20% de 80 = $(20/100) \times 80 = 16$

3. Porcentagem composta:

- Aplicações sucessivas de porcentagem (como aumento e desconto) não são somadas diretamente.
- Exemplo: 20% de desconto seguido de 20% de aumento não retorna ao valor original.

4. Porcentagem pode ultrapassar 100%.

- 150% significa uma quantidade 1,5 vezes maior que a base.

A porcentagem é uma ferramenta matemática amplamente utilizada em diversas áreas do cotidiano, servindo para expressar relações proporcionais de forma clara e objetiva. Suas aplicações são vastas e envolvem desde situações simples até análises mais complexas.

No campo das finanças pessoais, a porcentagem é essencial para calcular juros simples e compostos, entender descontos ou acréscimos em compras, além de interpretar corretamente impostos, como o ICMS e o ISS.

Em estatísticas e pesquisas, ela é usada para apresentar resultados de pesquisas de opinião, além de indicar taxas de crescimento ou redução populacional, o que facilita a compreensão de dados e tendências.

Na educação, a porcentagem é frequentemente usada no cálculo de notas e médias, como quando se diz que um aluno acertou 80% da prova, por exemplo.

No mundo dos negócios e da economia, ela auxilia na análise de lucros, perdas, margens de ganho, e também em comparações de desempenho entre diferentes períodos.

Até mesmo na saúde e na nutrição, o uso da porcentagem é comum, aparecendo em informações como o percentual de gordura, açúcar ou proteína nos alimentos, bem como nas taxas de vacinação da população.

13) ESCALA

A escala é a razão ou relação entre uma medida representada em um modelo (como um mapa, planta ou desenho) e a medida real correspondente no mundo real.

Matematicamente:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida no desenho ou modelo}}{\text{Medida real}}$$

Essa razão geralmente não tem unidade, pois é a comparação entre duas grandezas com a mesma unidade.

Propriedades da Escala:

1. Proporcionalidade:

A escala garante que todas as medidas do desenho ou modelo sejam proporcionais às medidas reais.

2. Razão constante:

A relação entre qualquer medida no desenho e sua medida real correspondente será sempre a mesma.

3. Sem unidade:

Como a escala compara duas medidas da mesma natureza (ex: metros com metros), ela é adimensional.

4. Pode ser aumentada ou reduzida:

Escala de redução: usada para representar objetos grandes (ex: mapas). Ex: 1:100.000 → 1 cm no mapa representa 100.000 cm (ou 1 km) na realidade.

Escala de ampliação: usada para representar objetos muito pequenos (ex: peças eletrônicas). Ex: 10:1 → 10 cm no desenho representam 1 cm real.

A escala é um recurso essencial para representar objetos, espaços ou estruturas em dimensões diferentes da original, mantendo a proporcionalidade. Seu uso é fundamental em diversas áreas, permitindo a visualização, análise e medição de elementos que seriam difíceis de interpretar em tamanho real.

Na cartografia, por exemplo, a escala é usada para representar grandes regiões como cidades, países ou continentes em mapas. Um mapa com escala 1:50.000 indica que 1 cm no mapa corresponde a 500 metros na realidade, facilitando o planejamento e a navegação.

No desenho técnico e na arquitetura, a escala é indispensável para criar plantas de edifícios, projetos de engenharia e peças mecânicas. Uma planta de casa com escala 1:100 significa que cada centímetro no papel representa 1 metro na construção real, o que garante precisão e clareza nos projetos.

No modelismo e na construção de maquetes, as escalas são usadas para criar réplicas em miniatura de objetos ou locais reais, como aviões, navios ou cidades. Uma maquete com escala 1:500, por exemplo, permite representar uma cidade de forma compacta e proporcional.

A microscopia também se apoia em escalas, mas com o objetivo inverso: ampliar objetos invisíveis a olho nu. Escalas como 5000:1 são comuns para visualizar estruturas microscópicas com riqueza de detalhes.

Por fim, em fotografias aéreas e imagens de satélite, as escalas permitem determinar distâncias e dimensões reais a partir das imagens capturadas do alto, sendo uma ferramenta essencial em estudos geográficos e ambientais.

14) EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Uma equação do primeiro grau é uma equação algébrica em que a variável (incógnita) aparece com expoente 1, ou seja, é linear. Tem a forma geral:

$$ax + b = 0$$

onde:

x é a incógnita;

a e b são números reais;

$a \neq 0$, (se $a=0$ não é do primeiro grau).

A solução de uma equação do 1º grau é o valor de x que a torna verdadeira.

Exemplo:

$$5x + 15 = 30$$

$$5x = 30 - 15$$

$$5x = 15$$

$$x = 15/5$$

$$x = 3$$

Resposta: $x = 3$.

PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU:

1. Possui uma única solução real (porque é de grau 1).
2. É uma função linear: seu gráfico é uma reta.
3. Soluções podem ser obtidas isolando a incógnita com operações inversas (adição, subtração, multiplicação, divisão).
4. Princípios de equivalência

- Pode-se somar ou subtrair o mesmo número dos dois lados.
- Pode-se multiplicar ou dividir ambos os lados da equação por um número diferente de zero.

As equações do primeiro grau estão presentes em diversas situações do cotidiano e em múltiplas áreas do conhecimento, sendo uma ferramenta matemática fundamental para resolver problemas que envolvem relações lineares.

No raciocínio lógico, por exemplo, equações simples ajudam a encontrar valores desconhecidos. Um caso clássico é: *"A soma de um número com 5 é igual a 12. Qual é o número?"* — uma equação do tipo $x+5=12$ $x + 5 = 12$ $x+5=12$.

No campo das finanças pessoais e comerciais, as equações do primeiro grau são usadas para calcular lucros, descontos, juros simples, entre outras aplicações que envolvem planejamento e controle financeiro.

Elas também aparecem em conversões de unidades, como na fórmula que transforma graus Celsius em Fahrenheit:

$$F = 1,8C + 32$$

Esse é um exemplo de equação linear aplicada em contextos científicos e do cotidiano.

Na engenharia e na física, relações como $d=v \cdot t$ (distância = velocidade $\times$ tempo) são equações do primeiro grau que ajudam a descrever o movimento de corpos e outras situações práticas.

Na construção civil e na arquitetura, essas equações são úteis em cálculos de medidas proporcionais, como o dimensionamento de paredes, vigas e outras estruturas, garantindo precisão e segurança nos projetos.

Até mesmo na área da programação, as equações do primeiro grau são aplicadas na criação de algoritmos e estruturas condicionais, resolvendo problemas lógicos de forma eficiente.

15) SISTEMAS LINEARES

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares com várias incógnitas. Cada equação do sistema tem a forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas,

$a_1, a_2, \dots, a_n$ são coeficientes reais ou complexos,

b é um valor constante.

Exemplo de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Métodos de resolução de sistemas

1. Método de substituição;
2. Método da adição;
3. Método gráfico.

Método de substituição

Nesse método, escolhemos uma das equações e isolamos uma das variáveis. Em seguida, substituímos essa expressão na outra equação

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Passo 1: Isolar uma variável na equação dois

$$x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$$

Passo 2: Substituir na equação um
Substituímos $x = y + 1$ na equação dois

$$3(y + 1) + 2y = 12$$

Distribuindo o 3:

$$3y + 3 + 2y = 12 \Rightarrow 5y + 3 = 12 \Rightarrow 5y = 12 - 3 \Rightarrow 5y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{5}$$

Passo 3: Encontrar x:

Usando $x = y + 1$:

$$x = \frac{9}{5} + 1 = \frac{9}{5} + \frac{5}{5} = \frac{14}{5}$$

Solução:

$$x = \frac{14}{5}, \quad y = \frac{9}{5}$$

Método da Adição

No método da adição, manipulamos as equações para que, ao somá-las, uma das variáveis seja eliminada.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Queremos eliminar uma variável somando as equações. Vamos multiplicar a equação (2) por 2 para que os coeficientes de y fiquem opostos:

$$2(x - y) = 2 \cdot 1 \Rightarrow 2x - 2y = 2 \quad (3)$$

Agora o sistema fica:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & (1) \\ 2x - 2y = 2 & (3) \end{cases}$$

Somar as equações:

$$(3x + 2y) + (2x - 2y) = 12 + 2$$

$$(3x + 2x) + (2y - 2y) = 14 \Rightarrow 5x + 0 = 14 \Rightarrow 5x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$

Substituir x em uma das equações:

Vamos substituir $x = 14/5$ na equação (2):

$$x - y = 1 \Rightarrow \frac{14}{5} - y = 1 \Rightarrow -y = 1 - \frac{14}{5} \Rightarrow -y = \frac{5}{5} - \frac{14}{5} = -\frac{9}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5}$$

Solução:

$$x = \frac{14}{5}, \quad y = \frac{9}{5}$$

Método do Gráfico

Este método consiste em representar graficamente as equações do sistema em um plano cartesiano e encontrar o ponto de interseção, que será a solução do sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Isolar y em ambas as equações:

$$3x + 2y = 12 \Rightarrow 2y = -3x + 12 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6$$

Equação (2):

$$x - y = 1 \Rightarrow -y = -x + 1 \Rightarrow y = x - 1$$

Agora temos as duas equações na forma de reta:

$$y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$y = x - 1$$

Encontrar o ponto de interseção:

Como queremos resolver o sistema, basta igualar as expressões de y:

$$-\frac{3}{2}x + 6 = x - 1$$

Multiplicamos tudo por 2 para eliminar o denominador:

$$-3x + 12 = 2x - 2 \Rightarrow -3x - 2x = -2 - 12 \Rightarrow -5x = -14 \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$

Substituindo em uma das equações para encontrar y, por exemplo, na equação

$$y = x - 1$$

$$y = \frac{14}{5} - 1 = \frac{14}{5} - \frac{5}{5} = \frac{9}{5}$$

Solução (ponto de interseção das retas):

$$x = \frac{14}{5}, \quad y = \frac{9}{5}$$

16) EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU (OU EQUAÇÃO QUADRÁTICA)

Uma **equação do segundo grau** é uma equação algébrica na variável x , da forma:

Onde:
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R} \text{ (números reais)}$$

$$a \neq 0 \text{ (pois se } a = 0, \text{ vira uma equação do primeiro grau)}$$

Coeficientes da Equação do 2º grau

a é o coeficiente do termo quadrático; obs: **a** tem que ser diferente;

b é o coeficiente do termo linear;

c é o termo constante.

Componentes da Função de Segundo Grau

- O coeficiente **a**, define a concavidade do gráfico da função, se $a > 0$ o gráfico é côncavo para cima, se $a < 0$ o gráfico é côncavo para baixo;

- O coeficiente **b**, define a inclinação do gráfico no ponto que este cruza o eixo Y.

- O coeficiente **c**, define a altura que o gráfico cruza o eixo Y.

Entendendo o Delta (ou Discriminante)

Propriedades:

Número de raízes (soluções reais)

Determinado pelo **discriminante** (ou **delta**), representado por Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se $\Delta > 0$: duas raízes reais e diferentes;

Se $\Delta = 0$: duas raízes reais e iguais (ou uma raiz com multiplicidade 2);

Se $\Delta < 0$: não há raízes reais (raízes complexas conjugadas).

Fórmula de Bhaskara (ou fórmula resolutiva):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Gráfico:

O gráfico da função do segundo grau, dada pela expressão $y = ax^2 + bx + c$, tem como representação geométrica uma **parábola**. Essa curva possui características específicas de acordo com o valor do coeficiente a .

Quando $a > 0$, a parábola é voltada para cima, ou seja, ela possui um mínimo o ponto mais baixo da curva. Já quando $a < 0$, a parábola é voltada para baixo, apresentando um máximo o ponto mais alto.

Essa diferença na concavidade é essencial na análise gráfica de equações quadráticas, sendo frequentemente cobrada em vestibulares. Entender o comportamento do gráfico ajuda a interpretar problemas envolvendo máximos e mínimos, trajetórias, lucro, e diversas outras aplicações da função quadrática.

Os vértices da parábola

O gráfico é uma parábola, e seu ponto mais importante é o **vértice**, que indica o ponto de **máximo** ou **mínimo** da função, dependendo da concavidade da curva.

As coordenadas do vértice podem ser encontradas por meio da fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a}, \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Conhecer as coordenadas do vértice é fundamental na resolução de problemas que envolvem otimização, trajetória de projéteis e análise de gráficos.

Soma e Produto das Raízes

As raízes são os valores de x para os quais $y = 0$. Essas raízes, quando existem, podem ser relacionadas diretamente aos coeficientes da equação através das fórmulas da soma e do produto das raízes.

$$\text{Soma: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Produto: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Essas relações são extremamente úteis para resolver problemas de forma mais rápida, especialmente quando o exercício exige encontrar a soma ou o produto das raízes sem precisar calcular os valores das raízes explicitamente.

Além disso, essas fórmulas ajudam na análise da equação e na construção do gráfico da parábola, auxiliando a identificar pontos importantes e a compreender o comportamento da função quadrática.

CAPÍTULO II:

GEOMETRIA PLANA

INTRODUÇÃO A GEOMETRIA

Após a introdução ao ciclo básico dos conceitos matemáticos, iniciaremos agora o estudo aprofundado da geometria, que se divide em duas grandes áreas: a geometria plana e a geometria espacial.

A geometria plana trata das figuras que podem ser representadas em um plano bidimensional, como triângulos, quadriláteros, círculos, entre outros. Já a geometria espacial estuda os sólidos e figuras tridimensionais, como cubos, prismas, esferas e cilindros.

Ao longo deste estudo, abordaremos as definições fundamentais, as propriedades específicas de cada figura, além de explorar exemplos práticos que facilitam a compreensão. Com esse conhecimento, o aluno estará preparado para resolver problemas típicos dos vestibulares, que envolvem desde simples cálculos de perímetros e áreas até o entendimento de volumes e relações espaciais.

1) RETAS

No estudo da geometria, um dos conceitos mais básicos e essenciais é o de reta. Trata-se de uma figura geométrica infinita em ambas as direções, que possui apenas uma dimensão: o comprimento. A reta é perfeitamente linear, ou seja, não apresenta curvas nem quebras ao longo de sua extensão.

Embora, por definição, não possua início nem fim, costuma-se representá-la graficamente por meio de letras minúsculas, como reta r , s ou t . Outra forma comum de representar uma reta é utilizando dois pontos distintos que pertencem a ela. Por exemplo, se dois pontos A e B pertencem à reta, podemos indicá-la como reta AB ou BA .

As propriedades das retas estão diretamente relacionadas à maneira como se comportam no plano, especialmente no plano cartesiano, e à sua interação com outras retas e elementos geométricos. Abaixo iremos algumas propriedades dessas retas.

Propriedades

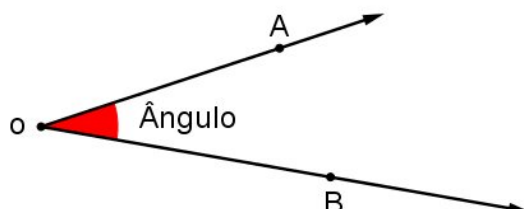
- Reta horizontal – Uma reta que é paralela ao plano horizontal. Se observarmos essa reta no plano cartesiano, seria uma reta paralela ao eixo x
- Reta vertical - Uma reta que é paralela ao plano vertical. Se observarmos essa reta no plano cartesiano, seria uma reta paralela ao eixo y .
- Reta paralela – Uma reta que não se cruza com nenhuma outra reta em um plano, ou seja, mantém sempre a mesma equidistância e direção entre ela e outra reta.
- Reta oblíqua - Uma reta que não é horizontal nem vertical, ou seja, não é paralela a nenhum eixo do plano cartesiano. Sua inclinação é maior que 0 graus e menor que 90 graus.
- Reta perpendicular - Uma reta que forma um ângulo de 90° com outra reta no mesmo plano. Os eixos das abscissas (eixo x) e das ordenadas (eixo y) no plano cartesiano são um exemplo de retas perpendiculares, pois formam entre si um ângulo de 90° quando se intersectam.

- Reta transversal – Uma reta que corta duas ou mais retas paralelas em diferentes pontos.
- Retas concorrentes - São duas ou mais retas que se intersectam em um único ponto em comum. Suas direções são diferentes, ou seja, não são paralelas.
- Retas coincidentes - São duas ou mais retas que estão no mesmo plano, possuem a mesma direção e todos os pontos em comum entre elas.
- Retas secante – Uma reta que intersecta uma circunferência em dois pontos distintos.
- Reta Tangente – Uma reta que toca a circunferência em apenas um ponto. Esse ponto de tangência é perpendicular ao raio da circunferência (forma um ângulo de 90°).

Compreender esses aspectos é fundamental para a resolução de problemas geométricos, tanto no plano quanto no espaço. O domínio desse conteúdo não apenas prepara o estudante para provas de vestibular, como também desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de análise espacial.

2) ÂNGULOS

O conceito de ângulo é fundamental para o entendimento das formas e das relações espaciais. Um ângulo é formado por dois raios (ou semi-retas) que partem de um mesmo ponto de origem, chamado de vértice. A abertura entre esses dois lados define a medida do ângulo, que pode ser expressa em graus ($^{\circ}$) ou radianos.



Definição formal:

Formalmente, um ângulo é a região do plano limitada por duas semi-retas com uma origem comum. Ele é medido a partir da quantidade de rotação necessária para mover um dos lados até coincidir com o outro. Por convenção, a medida completa de uma volta no plano equivale a 360° .

Alfabeto Grego nos ângulos

O alfabeto grego é amplamente utilizado na matemática e em diversas áreas da ciência, como física e engenharia. Entre as aplicações mais comuns está a representação de grandezas, constantes e, especialmente, ângulos.

Letras como alfa (α), beta (β) e gama (γ) são frequentemente utilizadas para indicar ângulos em triângulos ou em cálculos trigonométricos. Esse uso se consolidou ao longo do tempo por tradição acadêmica e pela necessidade de diferenciar variáveis matemáticas das letras latinas usadas com mais frequência em outras partes dos cálculos.

- Alfa - (α)
- Beta - (β)
- Gama - (γ)

- Teta - (θ)

Classificação dos Ângulos

Os ângulos podem ser classificados de acordo com sua medida:

Ângulo Agudo

- **Definição:** um ângulo cuja sua medida é **MENOR** que 90 graus. Seria um ângulo que é mais **FECHADO** do que o ângulo de 90 graus.

Ângulo Obtuso

- **Definição:** um ângulo cuja sua medida é **MAIOR** que 90 graus. Seria um ângulo que é mais **ABERTO** do que o ângulo de 90 graus.

Ângulo Reto

- **Definição:** um ângulo cuja medida é **IGUAL** à 90 graus.

Ângulo Raso

- **Definição:** um ângulo cuja a medida é igual à 180 graus.

Ângulos Complementares

- **Definição:** são os ângulos cuja a **SOMA** é igual a 90 graus.

Ângulo Suplementar

- **Definição:** são os ângulos cuja soma é 180 graus.
-

ÂNGULO ADJACENTE

Definição: São ângulos consecutivos que não possuem pontos internos em comum, porém possuem um lado em comum.

ÂNGULO CONGRUENTE

- **Definição:** São ângulos que possuem a mesma medida.

ÂNGULO OPOSTOS PELO VÉRTICE

- **Definição:** São ângulos formados por duas retas concorrentes. Essas retas formam quatro ângulos, sendo cada um ângulo tendo seu oposto igual em medida.

ÂNGULO CORRESPONDENTE

- **Definição:** São pares de ângulos que estão em posições semelhantes em relação à duas retas paralelas e uma transversal.

ÂNGULO ALTERNO INTERNO

- **Definição:** São pares de ângulos que estão no lado opostos de uma reta transversal e dentro de retas paralelas. Esses ângulos possuem medidas iguais.

ÂNGULO ALTERNO EXTERNO

- **Definição:** São pares de ângulos que estão no lado opostos de uma reta transversal e fora das retas paralelas. Esses ângulos possuem medidas iguais.

Aplicações dos Ângulos

Os ângulos possuem várias aplicações práticas:

- **Na Geometria**, são usados para calcular áreas, perímetros e classificar figuras como triângulos (ex: triângulo retângulo).
- **Na Trigonometria**, os ângulos estão presentes nas funções seno, cosseno e tangente, aplicadas em problemas envolvendo triângulos e movimentos circulares.
- **Na Arquitetura e Engenharia**, os ângulos são essenciais para projetar estruturas, telhados, rampas e escadas com segurança e estabilidade.
- **Na Navegação e Astronomia**, são usados para determinar rotas, localizar corpos celestes e calcular posições geográficas.
- **Na Computação Gráfica e Robótica**, ângulos são fundamentais para a movimentação e rotação de objetos e dispositivos.

3) POLÍGONOS

Polígonos são figuras geométricas planas, formadas por segmentos de reta consecutivos que se encontram apenas nos extremos, formando uma linha poligonal fechada. Cada um desses segmentos é chamado de lado, e os pontos de encontro entre eles são os vértices. O espaço interno delimitado pelos lados é chamado de região poligonal.

Propriedades dos Polígonos:

Número de lados (n): Determina o nome do polígono;

Soma dos ângulos internos (S): Dada pela fórmula:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Por exemplo, um hexágono (6 lados) tem soma dos ângulos internos igual:

$$(6 - 2) \cdot 180 = 720^\circ$$

Ângulo interno de um polígono regular

Se o polígono for regular (ou seja, com todos os lados e ângulos iguais), cada ângulo interno será:

$$\theta = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Diagonais: Segmentos que ligam dois vértices não consecutivos. O número de diagonais

de um polígono é dado por:

$$D = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Classificação dos Polígonos

- **Convexos;**
- **Côncavos.**

Um polígono **convexo** é aquele em que todos os seus ângulos internos são menores que 180°. Além disso, qualquer segmento de reta que ligue dois pontos dentro da figura permanece totalmente dentro da região poligonal.

Os polígonos **côncavos** possuem pelo menos um ângulo interno maior que 180°, e é possível traçar um segmento entre dois pontos internos que passe por fora da figura.

Principais Polígonos Convexos

Triângulo (3 lados)

- Sempre convexo, independentemente da forma.
- Tipos: equilátero, isósceles, escaleno.

Quadrilátero (4 lados)

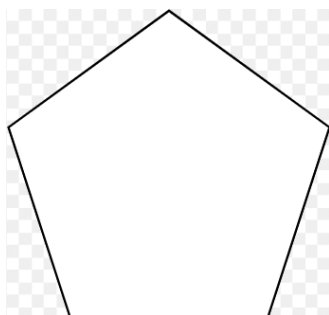
Nem todo quadrilátero é convexo.

Exemplos de **quadriláteros convexos**:

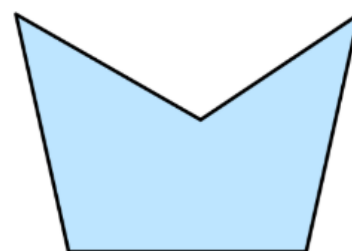
- Quadrado;
- Retângulo
- Losango;
- Trapézio isósceles;
- Paralelogramo (geralmente convexo).

Pentágono (5 lados)

- Pode ser convexo ou côncavo;
- Um pentágono regular (lados e ângulos iguais) é convexo.



Convexos



Côncavo

Hexágono (6 lados)

- O hexágono regular é convexo;
- Muito usado em colmeias e estruturas eficientes.

OBS: todos os polígonos regulares com mais de 3 lados são convexos, desde que os lados e ângulos sejam iguais.

Principais polígonos côncavos

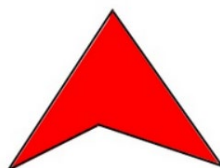
- Têm uma "reentrância" (parecem "dobrados" para dentro);
- Nem todos os lados "apontam para fora";
- Pelo menos uma diagonal fica fora da figura;
- Podem ter qualquer número de lados ≥ 4 (não existem triângulos côncavos).

Quadriláteros côncavos (4 lados)

- Um dos tipos mais comuns de polígonos côncavos;

Exemplo:

Flecha (ou dardo): um quadrilátero com uma "ponta" voltada para dentro;

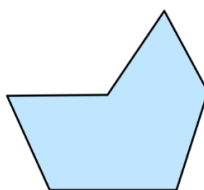


Pentágonos côncavos (5 lados)

- Um dos lados é "empurrado" para dentro;
- Um dos ângulos internos será maior que 180° .

Hexágonos côncavos (6 lados)

- Ao menos um ângulo interno acima de 180° ;
- A figura pode parecer ter um "entalhe" ou "recuo".



Polígonos de muitos lados (7 ou mais)

- Quanto mais lados, maior a possibilidade de criar formas côncavas com múltiplas reentrâncias.

Aplicações

A aplicação dos polígonos vai muito além da teoria. Na arquitetura e no design, polígonos regulares como quadrados e hexágonos são amplamente utilizados na composição de pisos, azulejos, vitrais e elementos decorativos, pois conseguem cobrir superfícies planas de forma eficiente, sem deixar espaços. Na engenharia e construção, os triângulos são elementos fundamentais por garantirem estabilidade em estruturas metálicas, como treliças e pontes.

Além disso, na cartografia e na computação gráfica, os polígonos são usados para representar áreas em mapas e formas tridimensionais em ambientes virtuais, permitindo a modelagem de superfícies complexas. Por fim, em disciplinas como geometria analítica e trigonometria, os polígonos são ferramentas essenciais para a resolução de problemas envolvendo coordenadas, cálculos de áreas, perímetros e distâncias.

4) TRIÂNGULOS

Um triângulo é uma figura geométrica plana formada por três segmentos de reta, chamados lados, que se encontram em três pontos distintos, conhecidos como vértices. A junção entre dois lados forma os ângulos internos, que estão localizados dentro da figura. Já os ângulos externos surgem a partir da continuidade de um dos lados do triângulo e do lado adjacente, ou seja, são formados entre um lado e o prolongamento do lado vizinho.

Além dessas características básicas, um triângulo também possui alguns segmentos notáveis, importantes para a compreensão de suas propriedades geométricas. A altura é o segmento perpendicular traçado de um vértice até o lado oposto (ou à extensão desse lado). A mediana liga um vértice ao ponto médio do lado oposto, dividindo-o em duas partes iguais. Já a bissetriz é o segmento que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes. Por fim, a mediatriz é uma reta perpendicular a um lado do triângulo que passa exatamente pelo ponto médio desse lado.

Classificação dos Triângulos

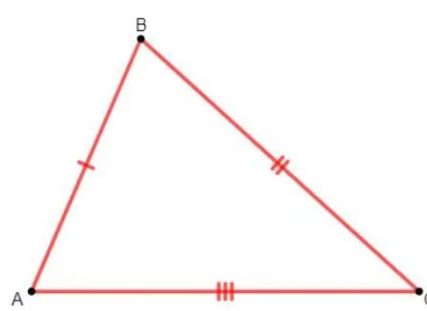
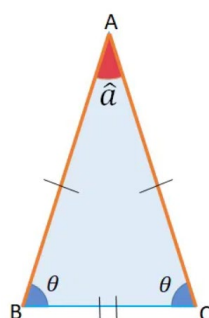
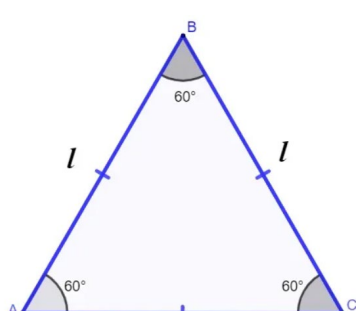
Relação entre os lados:

- Equilátero;
- Isósceles;
- Escaleno.

Equilátero - todos os lados iguais e ângulos internos iguais 60° .

Isósceles - dois lados iguais e dois ângulos iguais.

Escaleno - todos os lados e ângulos diferentes.



Relação entre os ângulos:

- Acutângulo;
- Retângulo;
- Obtusângulo.

Acutângulo - todos os ângulos menores que 90°.

Retângulo - possui um ângulo reto 90°

Obtusângulo - possui um ângulo maior que 90°.

Propriedades dos Triângulos

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°.
- A medida de um lado é sempre menor que a soma dos outros dois lados (desigualdade triangular).
- A altura traçada a partir do ângulo reto em um triângulo retângulo forma dois triângulos semelhantes ao original.
- O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
- Todo triângulo possui um circuncentro, incentro, ortocentro e baricentro, que são pontos notáveis com propriedades específicas.

O triângulo é uma das figuras geométricas mais estudadas na matemática, principalmente em conteúdos que envolvem medidas e relações métricas. Uma das principais grandezas associadas a essa figura é a sua área, que pode ser calculada de diferentes formas, dependendo das informações disponíveis.

A fórmula mais conhecida para calcular a área de um triângulo é dada por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

onde **b** representa a base do triângulo e **h** a altura correspondente a essa base, isto é, a distância perpendicular entre a base e o vértice oposto.

No entanto, quando a altura não está diretamente disponível, mas se conhece dois lados e o ângulo entre eles, utiliza-se a fórmula:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2}$$

Nesta expressão, **a** e **b** são os lados do triângulo e **C** é o ângulo formado entre esses lados. Essa fórmula é especialmente útil para triângulos oblíquos, ou seja, que não possuem ângulo reto.

Falando em triângulos retângulos, um dos teoremas mais importantes é o Teorema de Pitágoras, que estabelece a relação entre os comprimentos dos lados:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

onde **a** e **b** são os catetos e **c** a hipotenusa, ou seja, o lado oposto ao ângulo reto.

Para triângulos quaisquer, as relações entre lados e ângulos são estudadas por meio das leis dos Senos e dos Cossenos. A Lei dos Senos afirma que:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

onde **a**, **b** e **c** são os lados opostos aos ângulos **A**, **B** e **C**, respectivamente. Essa lei é fundamental para resolver triângulos quando alguns lados e ângulos são conhecidos.

Já a Lei dos Cossenos generaliza o Teorema de Pitágoras para qualquer triângulo, relacionando os lados com o cosseno do ângulo entre eles:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

Essa fórmula permite calcular um lado desconhecido quando se conhece os outros dois lados e o ângulo entre eles, ou encontrar o ângulo quando se conhecem os três lados.

5) SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são chamados de semelhantes quando apresentam a mesma forma, mesmo que seus tamanhos sejam diferentes. Isso quer dizer que, embora possam variar nas medidas dos lados, eles mantêm uma correspondência exata em seus ângulos e lados.

Mais especificamente, triângulos semelhantes possuem seus ângulos correspondentes congruentes, ou seja, iguais em medida. Além disso, os lados que ocupam posições correspondentes nesses triângulos são proporcionais, o que significa que a razão entre os comprimentos de dois lados correspondentes em um triângulo é a mesma para os demais pares de lados.

Essa propriedade é muito importante para resolver diversos problemas em geometria, pois permite calcular medidas desconhecidas a partir de relações de proporcionalidade e ângulos iguais.

A razão entre os lados correspondentes desses triângulos é sempre constante. Essa constante é chamada de **razão de semelhança** e representa o fator pelo qual um triângulo foi ampliado ou reduzido em relação ao outro. Ou seja, cada lado de um triângulo é proporcional ao lado correspondente do outro triângulo pela mesma razão.

Exemplo:

Se os triângulos ABC e DEF são semelhantes:

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$$

$$AB/DE = BC/EF = AC/DF$$

CrITÉRIOS de semelhança de triângulos

1. AA (Ângulo - Ângulo)

Um conceito fundamental na geometria dos triângulos é a semelhança entre figuras. Dois triângulos são ditos semelhantes quando possuem seus ângulos correspondentes congruentes, ou seja, iguais em medida, e conseqüentemente, seus lados proporcionais.

Especificamente, basta que dois ângulos de um triângulo sejam congruentes a dois ângulos de outro triângulo para que os dois triângulos sejam semelhantes. Isso ocorre porque a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180° . Assim, se dois ângulos são iguais entre os triângulos, o terceiro ângulo necessariamente também será igual, garantindo a semelhança.

Essa propriedade é importante pois a semelhança permite estabelecer relações de proporcionalidade entre os lados dos triângulos, o que facilita a resolução de diversos problemas geométricos, incluindo cálculos de medidas desconhecidas e análise de figuras complexas.

2. LAL (Lado - Ângulo - Lado)

Além do critério baseado na igualdade de dois ângulos, a semelhança entre triângulos pode ser estabelecida por meio da proporcionalidade dos lados e da congruência do ângulo entre eles. Especificamente, se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados correspondentes de outro triângulo, e o ângulo formado por esses lados é congruente em ambos, então os triângulos são semelhantes.

Esse critério, conhecido como Lado-ângulo-Lado (LAL), é fundamental para a resolução de problemas geométricos, pois permite confirmar a semelhança mesmo quando apenas informações parciais sobre lados e ângulos estão disponíveis.

Assim, ao aplicar o critério LAL, além de garantir a semelhança dos triângulos, podemos deduzir que os demais ângulos também são congruentes e que os lados restantes são proporcionais, facilitando cálculos de medidas desconhecidas e o estudo de propriedades geométricas relacionadas.

3. LLL (Lado - Lado - Lado)

Outro critério importante para identificar a semelhança entre triângulos é o chamado Lado-Lado-Lado (LLL). Segundo esse critério, se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados de outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.

A proporcionalidade entre os lados significa que as razões entre os comprimentos dos

lados correspondentes são iguais. Isso garante não apenas a semelhança das formas, mas também a congruência dos ângulos correspondentes, mesmo que esses ângulos não sejam conhecidos previamente.

O critério LLL é particularmente útil quando não se conhece nenhum ângulo dos triângulos, mas todas as medidas dos lados estão disponíveis. A partir da semelhança, é possível aplicar proporções para encontrar medidas faltantes, resolver problemas com escalas e interpretar situações geométricas mais complexas.

A razão de semelhança (k) é a razão entre os comprimentos de lados correspondentes:

$$k = \frac{\text{Lado do triângulo menor}}{\text{Lado correspondente do triângulo maior}}$$

A semelhança de triângulos, além de ser um conteúdo essencial na geometria, possui diversas aplicações práticas no cotidiano e em áreas como engenharia, arquitetura, cartografia e artes visuais. Entre os principais contextos de uso, destacam-se as escalas em mapas e maquetes, a determinação da altura de objetos por meio de sombras e o uso em fotografias e desenhos técnicos. Ao representar objetos muito grandes (como cidades ou edifícios) ou muito pequenos (como circuitos eletrônicos), utilizamos escalas, que são relações de proporcionalidade. Um mapa, por exemplo, reduz as dimensões reais da superfície terrestre mantendo a forma, ou seja, mantendo os ângulos e proporções. Esse princípio só é possível porque os triângulos formados pelas distâncias reais e os representados no papel são semelhantes. O mesmo vale para maquetes arquitetônicas, que são modelos em escala dos projetos reais.

É possível calcular a altura de objetos inacessíveis, como uma árvore ou um prédio, usando apenas a sombra que eles projetam. A técnica consiste em comparar o triângulo formado pelo objeto e sua sombra com o triângulo formado por uma régua ou estaca de altura conhecida. Como os triângulos são semelhantes (ângulos iguais formados pela luz solar), pode-se aplicar a proporcionalidade dos lados para encontrar a altura desejada.

Na fotografia e no desenho técnico, a representação fiel da realidade exige o uso da proporcionalidade entre as medidas do objeto real e sua imagem. O enquadramento, a perspectiva e a escala dos desenhos seguem princípios baseados na semelhança de triângulos. Ao projetar a imagem de um objeto tridimensional sobre um plano (como ocorre na lente da câmera ou em uma planta baixa), triângulos semelhantes são formados entre os pontos reais e seus correspondentes na imagem.

6) TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A Trigonometria é um ramo da Matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo. No caso dos triângulos retângulos (aqueles que têm um ângulo de 90°), essas relações são chamadas de razões trigonométricas.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo retângulo é um tipo especial de triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo com medida igual a 90°. Essa característica confere a ele propriedades únicas e muito úteis na geometria, especialmente em cálculos envolvendo trigonometria e o Teorema de Pitágoras.

Em um triângulo retângulo, os lados recebem nomes específicos:

- **Hipotenusa:** é o lado oposto ao ângulo reto e também o maior lado do triângulo.
- **Cateto oposto:** o cateto que fica oposto ao ângulo agudo que está sendo analisado.
- **Cateto adjacente:** é o cateto que está ao lado do ângulo agudo em questão.

Essas definições são fundamentais para a aplicação das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, que relacionam os lados do triângulo com os ângulos agudos. O triângulo retângulo também é a base do Teorema de Pitágoras, uma das ferramentas mais importantes da geometria.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seno:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Cosseno:

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Tangente:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Tabela com valores notáveis

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

TEOREMA DE PITÁGORAS

Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo de 90°) é igual à soma dos quadrados dos catetos (os dois lados menores).

$$c^2 = a^2 + b^2$$

c : hipotenusa (o lado mais longo, oposto ao ângulo reto);

a e b: catetos (os lados que formam o ângulo de 90°).

A trigonometria no triângulo retângulo vai muito além de uma simples matéria do currículo escolar. Ela é, na verdade, uma ferramenta poderosa e prática, capaz de conectar o mundo abstrato dos números ao mundo físico e real que nos cerca.

Presente em quase todas as áreas que envolvem espaço, forma, movimento e medição, a trigonometria permite resolver problemas complexos com métodos simples e precisos. Desde o cálculo de alturas inacessíveis até o planejamento de rotas aéreas, ela está por trás de soluções essenciais para a engenharia, a arquitetura, a geografia, a física e a computação gráfica.

7) TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER

A trigonometria no triângulo qualquer é o ramo da trigonometria que estuda os lados e ângulos de triângulos que não são necessariamente retângulos. Ao contrário da trigonometria no triângulo retângulo, aqui utilizamos fórmulas específicas como Lei dos Senos, Lei dos Cossenos e a Fórmula da Área.

Um triângulo qualquer é uma figura geométrica plana formada por três lados e três ângulos internos. Cada elemento do triângulo possui um papel importante na resolução de problemas geométricos e trigonométricos. Abaixo estão os principais:

- Lados (a, b, c): são os segmentos de reta que formam o triângulo. Cada lado é identificado por uma letra minúscula e está oposto a um ângulo.
- Ângulos Internos (α , β , γ): são os ângulos formados entre dois lados do triângulo. Cada ângulo é representado por uma letra grega e está **oposto** a um lado. Por exemplo, o ângulo α é oposto ao lado **a**, e assim por diante.
- Altura (h): é o segmento perpendicular traçado de um vértice ao lado oposto (ou ao prolongamento dele). Cada triângulo possui três alturas, uma para cada lado como base.
- Semiperímetro (s): é a metade do perímetro do triângulo, muito utilizado em fórmulas de área como a de Heron. É calculado por:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Esses elementos são fundamentais para aplicar teoremas e fórmulas importantes, como a Lei dos Senos, a Lei dos Cossenos e o Teorema de Heron, permitindo o cálculo de áreas, lados e ângulos mesmo em triângulos que não possuem ângulo reto.

1. LEI DOS SENOS

A Lei dos Senos é uma importante relação da trigonometria que conecta os lados de um triângulo com os senos dos seus ângulos opostos. Essa lei é válida para qualquer tipo de triângulo — seja ele acutângulo, retângulo ou obtusângulo — e é muito útil para resolver triângulos quando não há um ângulo reto envolvido.

A fórmula da Lei dos Senos é:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Onde:

- a, b, c são os lados do triângulo;
- α, β, γ são os ângulos opostos aos lados a, b, c , respectivamente;
- $\sin(\theta)$ representa o seno do ângulo θ .

Aplicações da Lei dos Senos

A Lei dos Senos é especialmente útil para:

- Calcular lados ou ângulos desconhecidos quando conhecemos um lado e seu ângulo oposto, junto com outro ângulo ou lado.
- Resolver triângulos oblíquos (aqueles que não têm ângulo de 90°).
- Problemas práticos como cálculo de distâncias inacessíveis, ângulos de visão e navegação.

Quando usar:

- Quando temos um ângulo e o lado oposto conhecidos, além de outro ângulo ou lado.
- Em problemas de triângulos oblíquos (acutângulos ou obtusângulos)

2. LEI DOS COSSENOS

A Lei dos Cossenos é uma ferramenta fundamental na trigonometria para resolver triângulos que não possuem um ângulo reto e quando a Lei dos Senos não pode ser aplicada diretamente. Ela permite calcular um lado desconhecido a partir dos outros dois lados e do ângulo entre eles, ou calcular um ângulo quando todos os lados são conhecidos.

A fórmula da Lei dos Cossenos é:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Onde:

- a e b são os lados conhecidos do triângulo;
- c é o lado oposto ao ângulo γ .
- γ é o ângulo entre os lados a e b;
- $\cos(\gamma)$ é o cosseno do ângulo γ .

Aplicações da Lei dos Cossenos

- Calcular o terceiro lado de um triângulo quando conhecemos dois lados e o ângulo entre eles (caso LAL).
- Calcular os ângulos do triângulo quando todos os lados são conhecidos (caso LLL).
- Resolver triângulos oblíquos em situações onde a Lei dos Senos não fornece resultados diretos.

Essa lei é uma generalização do Teorema de Pitágoras, que vale para triângulos retângulos e pode ser vista como um caso particular da Lei dos Cossenos quando o ângulo $\gamma=90^\circ$.

Quando usar:

- Quando conhecemos **dois lados e o ângulo entre eles**.
- Quando conhecemos **os três lados** e queremos encontrar um ângulo.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

Existem várias formas de calcular a área de um triângulo não retângulo:

Fórmula com seno do ângulo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$$

Usada quando conhecemos dois lados e o ângulo entre eles.

Fórmula de Heron

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Onde $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro. Usada quando conhecemos os três lados.

Casos de Ambiguidade (Lei dos Senos)

O caso SSA (lado, lado, ângulo não entre eles) pode levar a:

- 0 triângulos (quando o lado oposto é muito pequeno).
- 1 triângulo (quando o lado oposto é igual ou maior que o outro lado).
- 2 triângulos (caso ambíguo).

8) CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência é a linha curva que forma o contorno de um círculo. Ela é composta por todos os pontos que estão à mesma distância de um ponto fixo chamado centro. Essa distância constante é conhecida como raio da circunferência.

Para visualizar, imagine a borda de uma roda de bicicleta, essa linha fina que delimita a roda é exatamente uma circunferência.

É importante destacar que a circunferência é uma linha unidimensional, ou seja, possui apenas comprimento, mas não possui área. Ela representa apenas o perímetro do círculo, enquanto a área está relacionada à região interna delimitada por essa linha.

O círculo é a região plana delimitada pela circunferência, ou seja, compreende toda a área interna ao contorno formado pela circunferência. Se pensarmos no disco da roda de uma bicicleta, a parte preenchida e sólida que fica dentro da borda é exatamente o círculo.

Diferentemente da circunferência, que é uma linha unidimensional e não possui área, o círculo possui área, pois representa toda a superfície dentro do seu limite.

A área do círculo pode ser calculada pela fórmula:

$$A = \pi r^2$$

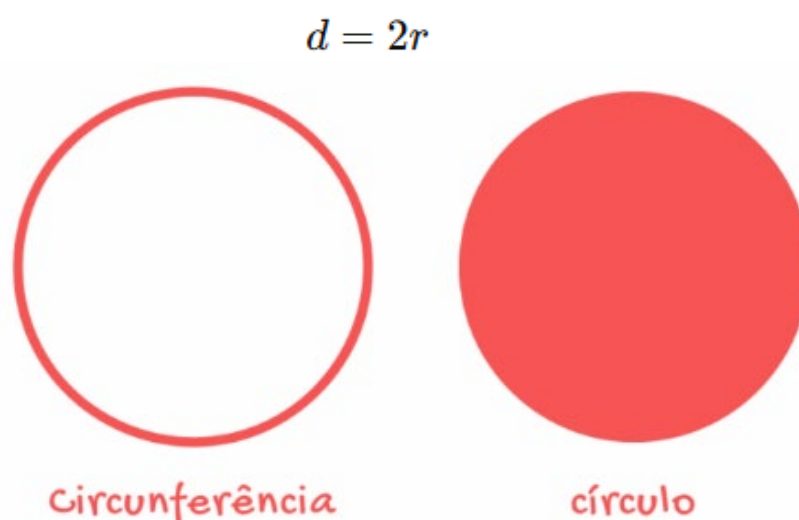
onde **r** é o raio, ou seja, a distância do centro até qualquer ponto da circunferência.

ELEMENTOS DO CÍRCULO E DA CIRCUNFERÊNCIA

Para entender melhor as propriedades do círculo e da circunferência, é fundamental conhecer seus elementos principais:

- **Centro (O):** É o ponto fixo que representa o “meio” do círculo e da circunferência. Todos os pontos da circunferência estão à mesma distância desse ponto.
- **Raio (r):** É o segmento de reta que liga o centro a qualquer ponto da circunferência. O raio é constante em toda circunferência.
- **Diâmetro (d):** É o segmento de reta que passa pelo centro e une dois pontos opostos

da circunferência. O diâmetro é o maior segmento possível dentro do círculo e equivale ao dobro do raio:



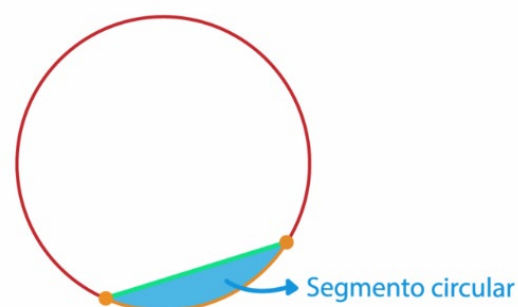
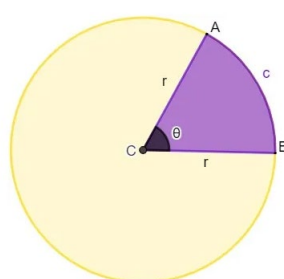
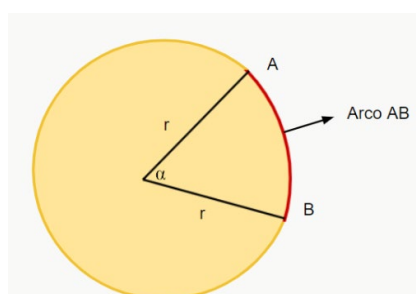
Esses elementos são essenciais para calcular o comprimento da circunferência, a área do círculo e para entender diversas propriedades geométricas relacionadas a essas figuras.

Corda: Segmento que une dois pontos quaisquer da circunferência, mas que não necessariamente passa pelo centro.

Arco: Parte da circunferência compreendida entre dois pontos.

Setor Circular: Região delimitada por dois raios e o arco correspondente.

Segmento Circular: Região delimitada por uma corda e o arco correspondente.



FÓRMULAS IMPORTANTES

Comprimento da Circunferência

O comprimento C é o "perímetro" da circunferência.

$$C = 2\pi r = \pi d$$

Área do Círculo

A área A é a medida da região interna ao círculo.

$$A = \pi r^2$$

Onde π é uma constante aproximadamente igual a 3,1416.

- O valor de π é uma constante irracional, ou seja, possui infinitas casas decimais não periódicas.
- A circunferência é o objeto geométrico que possui o menor perímetro para uma dada área, o que é a base da forma esférica da Terra e outras esferas naturais.
- Em problemas reais, como na engenharia, o cálculo preciso do comprimento e área do círculo é fundamental para dimensionar rodas, engrenagens, e outros componentes.

9) ÁREAS

Área é a medida da superfície de uma figura plana, ou seja, a quantidade de espaço dentro dos seus limites. Normalmente, a área é expressa em unidades quadradas, como:

- cm^2 (centímetros quadrados)
- m^2 (metros quadrados)
- mm^2 (milímetros quadrados)
- km^2 (quilômetros quadrados)

Calcular a área de figuras geométricas planas é fundamental para diversos problemas de matemática e aplicações práticas. A seguir, estão as fórmulas das áreas das figuras mais comuns:

Quadrado: **definição:** figura com quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

$$\text{Área} = L^2$$

onde L é o lado do quadrado.

Retângulo: **definição:** figura com quatro ângulos retos e lados opostos iguais.

$$\text{Área} = b \times h$$

onde b é a base e h é a altura.

Triângulo: **definição:** figura com três lados.

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

onde b é a base e h a altura relativa a essa base.

Paralelogramo: **definição:** quadrilátero com lados opostos paralelos.

$$A = b \times h$$

onde b é a base e h é a altura.

Trapézio: **definição:** quadrilátero com dois lados paralelos.

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

onde B e b são as bases maior e menor, e h é a altura.

Círculo: **definição:** região limitada pela circunferência.

onde r é o raio.

$$A = \pi r^2$$

A transição da geometria plana para a geometria espacial acontece de forma natural: muitos dos conceitos e fórmulas que utilizamos no plano servem como base para compreender os sólidos geométricos. Por exemplo, ao calcular a área total de um cubo, utilizamos a fórmula da área do quadrado, figura plana que compõe suas faces. Da mesma forma, o volume de prismas e cilindros é determinado a partir da área da base, uma figura bidimensional, multiplicada pela altura do sólido.

Essa conexão entre os dois ramos mostra como a geometria plana é fundamental para a construção do raciocínio espacial. A geometria espacial, por sua vez, amplia nossa visão matemática, permitindo o estudo de formas tridimensionais, como pirâmides, cones, esferas e poliedros. Com ela, podemos analisar volumes, áreas de superfícies, seções planas e as diferentes relações entre formas no espaço, habilidades essenciais tanto para a resolução de questões em vestibulares quanto para aplicações em áreas como arquitetura, engenharia e design.

No próximo grande capítulo da nossa apostila, vamos nos aprofundar nos principais temas da geometria espacial, explorando suas propriedades, fórmulas e aplicações com base sólida nos conceitos que já desenvolvemos até aqui.

CAPÍTULO III:

GEOMETRIA ESPACIAL

1) POLIEDROS

Na geometria espacial, um dos principais objetos de estudo são os poliedros. Eles são sólidos tridimensionais formados exclusivamente por faces planas e poligonais, conectadas por arestas e vértices.

As faces são os polígonos que compõem a superfície do poliedro, como triângulos, quadrados ou outros tipos de polígonos. As arestas são os segmentos de reta que resultam do encontro de duas faces, funcionando como as “bordas” do sólido. Já os vértices são os pontos onde três ou mais arestas se encontram, formando os cantos da figura.

O estudo dos poliedros é essencial para a compreensão das formas tridimensionais e aparece frequentemente em questões de vestibulares, tanto em matemática quanto em áreas que envolvem raciocínio espacial, como física e artes visuais.

CLASSIFICAÇÃO DOS POLIEDROS

- **Convexos:** todos os segmentos de reta entre dois pontos do poliedro estão inteiramente dentro dele.
- **Côncavos:** possuem reentrâncias; algum segmento entre dois pontos do poliedro passa fora da figura.
- **Regulares:** todas as faces são polígonos regulares congruentes (mesmo formato e tamanho), e todos os ângulos e arestas são iguais.
Ex: Tetraedro regular, Cubo (hexaedro regular), Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro (os cinco sólidos de Platão).
- **Irregulares:** não possuem todas as faces, arestas e ângulos congruentes.

PROPRIEDADES DOS POLIEDROS

Relação de Euler

Para todo poliedro convexo, existe uma importante fórmula matemática chamada Relação

de Euler, que liga o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) do poliedro. Essa relação é expressa pela seguinte equação:

$$V - A + F = 2$$

Essa fórmula foi descoberta por Leonhard Euler, um dos maiores matemáticos da história, e é válida apenas para poliedros convexos – ou seja, aqueles em que qualquer segmento de reta entre dois pontos internos ao sólido permanece inteiramente dentro dele.

A Relação de Euler é uma ferramenta muito útil para resolver problemas envolvendo poliedros, especialmente em questões de vestibulares, pois permite encontrar um dos elementos (vértices, arestas ou faces) quando os outros dois são conhecidos.

Volume e Área

Cada tipo de poliedro possui fórmulas específicas para o cálculo da área total e do volume, dependendo do tipo de poliedro e das dimensões dadas. Nós iremos conhecer cada um deles ao longo dos capítulos abaixo.

Aplicações dos Poliedros

Os poliedros, além de serem objetos fundamentais na geometria espacial, possuem diversas aplicações práticas em diferentes áreas do conhecimento.

Na arquitetura, estruturas como cúpulas geodésicas e fachadas modernas utilizam poliedros para garantir estabilidade e beleza estética, aproveitando a rigidez proporcionada pelas faces planas unidas por arestas e vértices.

Na engenharia, os poliedros são essenciais para a modelagem de estruturas mecânicas, como cascos de navios e o design aerodinâmico de aeronaves, onde a forma tridimensional influencia diretamente a eficiência e resistência das construções.

Já na computação gráfica, a modelagem tridimensional de objetos em jogos e animações utiliza poliedros como base para criar formas complexas, facilitando a manipulação e visualização dos modelos no espaço virtual.

Na química, muitas moléculas e cristais possuem estrutura poliedral. Um exemplo notável é o fulereno, uma molécula composta por átomos de carbono que formam uma estrutura semelhante ao icosaedro, mostrando a presença dos poliedros também no mundo microscópico.

Além disso, na matemática e no ensino, os poliedros são importantes para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos espaciais, simetrias e da geometria tridimensional, facilitando o aprendizado de propriedades geométricas.

EXERCÍCIOS:

1. Considere um sólido com 6 faces quadradas, 8 vértices e 12 arestas. Qual é o nome desse poliedro?
2. Um poliedro tem 10 faces, sendo 6 quadradas e 4 triangulares. Sabendo que ele é um poliedro convexo, quantas arestas ele possui?
3. Um poliedro possui 20 faces e 30 arestas. Quantos vértices ele tem?
4. Desenhe um poliedro que tenha:
 - 8 vértices
 - 12 Arestas
 - 6 faces, sendo 2 hexagonais e 4 quadradas

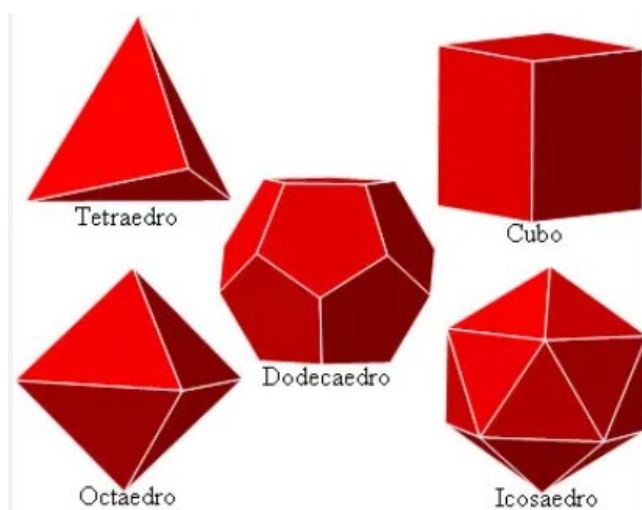
Em seguida, nomeie o poliedro.

5. Considere um tetraedro regular com arestas medindo 6 cm. Calcule:
 - a) O número de vértices, arestas e faces.
 - b) O perímetro de uma face triangular.

2) POLIEDROS DE PLATÃO

Os Poliedros de Platão são sólidos geométricos que fascinam matemáticos, filósofos e artistas desde a Grécia Antiga. Eles representam um conjunto especial de poliedros regulares convexos, que possuem propriedades geométricas e simétricas únicas.

Platão, filósofo grego do século IV a.C., foi um dos primeiros a associá-los aos elementos da natureza, daí o nome que os acompanha até hoje. Existem exatamente cinco poliedros de Platão, e nenhum mais além desses cumpre os critérios rigorosos que os definem.



Os Poliedros de Platão são uma classe especial de poliedros que atendem a critérios rigorosos de simetria e regularidade. Para ser considerado um poliedro de Platão, o sólido deve satisfazer três condições fundamentais:

1. Todas as faces são polígonos regulares congruentes, ou seja, cada face tem o mesmo número de lados, e todos os seus ângulos e lados possuem a mesma medida.
2. A mesma quantidade de faces se encontra em cada vértice, garantindo uma uniformidade no encontro dos vértices em todo o poliedro.
3. O poliedro deve ser convexo, o que significa que qualquer segmento de reta que liga dois pontos dentro do sólido permanece inteiramente dentro dele, sem “sair para fora”.

Por conta dessas propriedades, existem apenas cinco poliedros de Platão: o tetraedro (faces triangulares), o cubo ou hexaedro (faces quadradas), o octaedro (faces triangulares), o dodecaedro (faces pentagonais) e o icosaedro (faces triangulares). Esses sólidos são fundamentais para a compreensão da geometria espacial.

OS CINCO POLIEDROS DE PLATÃO

1. Tetraedro

- Faces: 4 triângulos equiláteros
- Arestas: 6
- Vértices: 4
- Vértices por face: 3
- Elemento associado (Platão): Fogo

2. Cubo (ou Hexaedro)

- Faces: 6 quadrados
- Arestas: 12
- Vértices: 8
- Vértices por face: 4
- Elemento associado: Terra

3. Octaedro

- Faces: 8 triângulos equiláteros
- Arestas: 12
- Vértices: 6
- Vértices por face: 3
- Elemento associado: Ar

4. Dodecaedro

- Faces: 12 pentágonos regulares
- Arestas: 30
- Vértices: 20

- Vértices por face: 5
- Elemento associado: Éter (ou Universo)

5. Icosaedro

- Faces: 20 triângulos equiláteros
- Arestas: 30
- Vértices: 12
- Vértices por face: 3
- Elemento associado: Água

Na antiguidade, o filósofo grego Platão estabeleceu uma ligação profunda entre os poliedros e os elementos fundamentais da natureza, conforme descrito em seu diálogo *Timeu*. Ele acreditava que o universo era formado por essas formas geométricas perfeitas, cada uma representando um dos elementos:

- O tetraedro, com sua forma pontiaguda e instável, simbolizava o fogo.
- O cubo, sólido e estável, representava a terra.
- O octaedro, leve e delicado, estava associado ao ar.
- O icosaedro, com sua forma que sugere fluidez, correspondia à água.
- O dodecaedro, por sua vez, era considerado a forma utilizada por Deus para moldar o cosmos.

Essa concepção platônica influenciou profundamente a filosofia natural e a alquimia durante séculos, ao estabelecer um elo entre a geometria, a matéria e o cosmos.

3) POLIEDROS REGULARES E NÃO REGULARES

Um poliedro regular é aquele que apresenta uma simetria perfeita em suas características. Para ser considerado regular, ele deve atender a três critérios principais:

- Todas as faces são polígonos regulares congruentes, ou seja, todas as faces são iguais, tanto no número de lados quanto na medida dos ângulos.
- Todos os ângulos e arestas são iguais, garantindo uniformidade em toda a estrutura do sólido.
- Em cada vértice, encontram-se o mesmo número de arestas e os ângulos formados são iguais, assegurando que todos os vértices tenham a mesma configuração.

Por outro lado, um poliedro não regular não atende a todos esses critérios. Isso significa que:

- Suas faces podem ser diferentes, ou seja, não são todas iguais.
- Pode ter polígonos variados como faces, misturando diferentes formas.
- Os ângulos e arestas podem apresentar medidas diferentes, quebrando a simetria perfeita dos poliedros regulares.

Assim, a regularidade de um poliedro está diretamente ligada à sua simetria e uniformidade geométrica.

Os poliedros podem ser classificados em dois tipos principais, conforme sua forma e propriedades geométricas:

- **Poliedros convexos não regulares:**

Esses poliedros não possuem a regularidade completa das faces e ângulos, mas apresentam

a característica de convexidade. Isso significa que, para qualquer dois pontos dentro do poliedro, o segmento de reta que os une permanece inteiramente dentro do sólido. Exemplos comuns incluem a pirâmide de base retangular, o paralelepípedo e os troncos de pirâmides.

- **Poliedros Não Convexos:**

Ao contrário dos convexos, esses poliedros possuem reentrâncias, ou seja, partes da superfície que “entram para dentro” do sólido, criando cavidades ou dobras para o interior. Essa característica faz com que segmentos de reta entre dois pontos internos possam sair do sólido. Um exemplo clássico é a estrela dodecaédrica.

4) PRISMA

Um prisma é um sólido geométrico tridimensional que possui duas bases congruentes, ou seja, iguais em forma e tamanho, que são paralelas entre si. Essas bases são formadas por polígonos. As faces laterais do prisma são paralelogramos, e na maioria dos casos, essas faces são retângulos.

Essa configuração faz do prisma uma figura muito importante no estudo da geometria espacial, sendo frequentemente usada para modelar objetos reais

Características do prisma

- O prisma é um sólido tridimensional com as seguintes partes principais:
- Bases: São os dois polígonos congruentes e paralelos que formam o “topo” e o “fundo” do prisma.
- Faces Laterais: São paralelogramos que ligam os lados correspondentes das duas bases, formando as superfícies verticais do prisma.
- Arestas: São os segmentos de reta onde duas faces se encontram, sendo responsáveis pelas “bordas” do sólido.
- Vértices: São os pontos onde se encontram três arestas, correspondendo aos “cantinhos” do prisma.

Classificação dos Prismas

Os prismas são classificados de acordo com o formato do polígono que forma suas bases. Por exemplo:

- Prisma triangular: tem bases em forma de triângulos.
- Prisma quadrangular: tem bases em forma de quadriláteros, como o cubo e o paralelepípedo.
- Prisma pentagonal: tem bases em forma de pentágonos.
- Prisma hexagonal: tem bases em forma de hexágonos.

Essa classificação é importante para identificar o tipo de prisma e entender suas propriedades geométricas específicas.

Classificação dos Prismas quanto à Orientação das Faces Laterais

Além da classificação pelo polígono da base, os prismas também podem ser classificados de acordo com a orientação das suas faces laterais:

- Prisma reto: as arestas laterais são perpendiculares às bases, fazendo com que as faces laterais sejam retângulos. Esse tipo de prisma tem uma forma mais “vertical” e alinhada.
- Prisma oblíquo: as arestas laterais não são perpendiculares às bases, o que faz com que as faces laterais sejam paralelogramos inclinados. Esse prisma parece “inclinado” ou “tombado”.

Essa distinção é importante para identificar o formato exato do prisma e para resolver problemas relacionados à sua geometria.

Exercícios:

1. Um prisma triangular tem altura de 10 cm e uma base triangular equilátero com lados de 6 cm. Calcule:
 - a) A área da base.
 - b) O volume do prisma.
2. Um prisma reto tem base quadrada com lado medindo 5 cm e altura 12 cm. Qual é a área total do prisma?
3. Quantas faces, vértices e arestas possuem um prisma hexagonal?
4. Um prisma pentagonal regular tem arestas da base medindo 4 cm e altura de 9 cm. Calcule o volume do prisma.
5. Um prisma reto tem área lateral igual a 96 cm^2 e altura 8 cm. Qual é o perímetro da base do prisma?

5. PIRÂMIDE

Na Geometria Espacial, uma pirâmide é um sólido geométrico tridimensional formado por um polígono como base e faces laterais triangulares que se encontram em um ponto comum chamado vértice (ou ápice). Esse ponto não está no plano da base.

As pirâmides são figuras bastante estudadas na matemática e também têm presença marcante na arquitetura e na história (como as famosas pirâmides do Egito).

Elementos da Pirâmide

Uma pirâmide é um sólido geométrico tridimensional formado por vários elementos:

- Base: é um polígono que pode variar em número de lados, como triângulo, quadrado, pentágono, entre outros.
- Faces laterais: são triângulos que ligam cada vértice da base ao vértice superior da pirâmide.
- Arestas da Base: correspondem aos lados do polígono que forma a base.
- Arestas Laterais: são os segmentos de reta que conectam o vértice da pirâmide aos vértices da base.
- Vértices: pontos onde se encontram duas ou mais arestas, incluindo o vértice superior e os vértices da base.
- Altura (h): é a distância perpendicular do vértice superior ao plano da base.
- Apótema (apo): em pirâmides regulares, é a altura de cada face lateral triangular, medida do meio da aresta da base até o vértice da pirâmide.

Esses elementos são fundamentais para a compreensão da estrutura da pirâmide e para

cálculos relacionados ao seu volume e área.

Classificação das Pirâmides

As pirâmides são classificadas de acordo com a forma do polígono que constitui sua base.

Por exemplo:

- Pirâmide triangular: base com formato de triângulo.
- Pirâmide quadrangular: base com formato de quadrado ou retângulo.
- Pirâmide pentagonal: base em forma de pentágono.
- Pirâmide hexagonal: base em forma de hexágono.

Essa classificação ajuda a identificar o tipo de pirâmide e facilita o estudo das suas propriedades geométricas.

Classificação das Pirâmides quanto à Regularidade

Além da forma da base, as pirâmides podem ser classificadas em:

- Pirâmide regular: quando a base é um polígono regular (com todos os lados e ângulos iguais) e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes, ou seja, iguais entre si.
- Pirâmide irregular: quando a base é um polígono irregular (com lados e ângulos diferentes) e as faces laterais não são congruentes, apresentando formas e tamanhos variados.

Essa classificação é importante para entender as propriedades geométricas e simetrias presentes nas pirâmides.

Fórmulas das Pirâmides

Área da Base (A_b):

A área da base depende do polígono que a compõe. Por exemplo:

Triângulo:

$$A_b = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Quadrado:

$$Ab = lado^2$$

Pentágono regular:

$$Ab = \frac{Perímetro \times apótema}{2}$$

Área Lateral (Al):

Para pirâmides regulares, a área lateral é dada por:

$$Al = \frac{Perímetro da base \times apótema}{2}$$

Área Total (At):

$$At = Ab + Al$$

Volume (V):

O volume de qualquer pirâmide é dado por:

$$V = \frac{Ab \times h}{3}$$

onde h é a altura da pirâmide, a distância perpendicular do vértice ao plano da base.

EXERCÍCIOS:

- Uma pirâmide de base quadrada tem lado da base medindo 6 cm e altura da pirâmide de 10 cm. Calcule o volume da pirâmide.

- Quantas faces, vértices e arestas tem uma pirâmide de base pentagonal?
- A área da base de uma pirâmide triangular é 12 cm^2 e a altura da pirâmide é 15 cm . Calcule o volume da pirâmide.
- Uma pirâmide regular tem base hexagonal com lado medindo 4 cm e altura da pirâmide de 9 cm . Calcule:
 - a) A área da base.
 - b) volume da pirâmide.
- Uma pirâmide tem área lateral total igual a 72 cm^2 e área da base igual a 24 cm^2 . Qual é a área total da pirâmide?

6) CILINDRO

O cilindro é um sólido geométrico tridimensional estudado na geometria espacial. Ele é caracterizado por possuir duas bases circulares e paralelas, que são unidas por uma superfície curva contínua.

O cilindro é classificado como um sólido de revolução, pois pode ser obtido ao girar um retângulo em torno de um de seus lados, criando assim sua forma característica.

Elementos do Cilindro

O cilindro é composto por diversos elementos importantes:

- Bases: são dois círculos congruentes (iguais em tamanho) e paralelos que formam as “tampas” do cilindro.
- Altura (h): é a distância perpendicular entre as duas bases.
- Raio (r): é o raio dos círculos que formam as bases.
- Geratriz (g): no cilindro reto, a geratriz é igual à altura. Trata-se do segmento de reta que liga pontos correspondentes das duas bases ao longo da superfície curva.
- Eixo: é o segmento que une os centros das duas bases, passando pelo centro do cilindro.

Classificação

Os cilindros podem ser classificados de acordo com a posição do eixo em relação às bases:

- Cilindro reto: quando o eixo é perpendicular às bases. Essa é a forma mais comum de cilindro, com as bases alinhadas verticalmente.
- Cilindro oblíquo: quando o eixo não é perpendicular às bases, fazendo com que o cilindro tenha uma aparência inclinada ou “tombada”.

Essa classificação é importante para entender as propriedades geométricas e visuais dos cilindros.

Fórmulas do Cilindro

Área da Base (Ab):

Como as bases são círculos, a área da base é dada por:

$$Ab = \pi r^2$$

onde r é o raio da base.

Área Lateral (Al):

A área lateral corresponde à superfície curva que envolve o cilindro, calculada por:

$$Al = 2\pi rh$$

onde h é a altura do cilindro.

Área Total (At):

A área total é a soma das áreas das duas bases com a área lateral:

$$At = 2Ab + Al = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

Volume (V):

O volume do cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura:

$$V = Ab \times h = \pi r^2 h$$

O formato cilíndrico é muito comum em diversas áreas devido à sua eficiência e simplicidade geométrica. Algumas aplicações práticas do cilindro incluem:

- Tanques de combustível: utilizados para armazenar líquidos como gasolina e óleo.

- Latas de refrigerante: embalagens cilíndricas que facilitam o empilhamento e o transporte.
- Tubulações e canos: usados em sistemas hidráulicos e de saneamento para transportar líquidos e gases.
- Cilindros hidráulicos: componentes de máquinas que usam a pressão de fluidos para realizar movimentos lineares.

Essas aplicações mostram a importância do cilindro na indústria e no cotidiano.

EXERCÍCIOS:

1. Um cilindro tem raio da base medindo 5 cm e altura 12 cm. Calcule o volume do cilindro.
2. Calcule a área total de um cilindro com raio da base 3 cm e altura 10 cm.
3. Um cilindro tem área lateral igual a $94,2 \text{ cm}^2$ e raio da base 7 cm. Qual é a altura do cilindro?
4. Um tanque cilíndrico tem 2 metros de altura e 1 metro de raio. Qual é a capacidade do tanque em litros? (Considere $1\text{m}^3=1000$).
5. Um cilindro tem volume igual a 314 cm^3 e altura de 10 cm. Qual é o raio da base?

7) CONE

O cone é um sólido geométrico tridimensional que possui uma base circular e uma superfície lateral curva que se afunila até um ponto chamado vértice. Visualmente, ele lembra objetos do cotidiano como um chapéu de festa ou um sorvete de casquinha.

O cone é um exemplo clássico de sólido de revolução, pois pode ser gerado ao girar um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Esse movimento cria a superfície curva que liga o contorno da base ao vértice.

Elementos do Cone

O cone possui elementos importantes que definem sua estrutura:

- Base: é um círculo, que forma a parte inferior do sólido.
- Vértice: é o ponto oposto à base, onde todas as geratrizes se encontram. É o “pico” do cone.
- Altura (h): é a distância perpendicular entre o vértice e o centro da base. No cone reto, essa altura está alinhada com o eixo do cone.
- Raio da base (r): é o raio do círculo que forma a base. Ele vai do centro da base até qualquer ponto da sua borda.
- Geratriz (g): é o segmento que liga o vértice a qualquer ponto da circunferência da base. No cone reto, a geratriz, a altura e o raio formam um triângulo retângulo.

Esses elementos são fundamentais para compreender as fórmulas de área e volume do cone.

Classificação dos Cones

Os cones podem ser classificados de acordo com a posição do vértice em relação à base e com a forma da base:

- Cone reto: ocorre quando a linha que liga o vértice ao centro da base é perpendicular ao plano da base. Nesse caso, a geratriz tem o mesmo comprimento em qualquer ponto da circunferência, formando um cone simétrico.

- Cone oblíquo: o vértice não está alinhado perpendicularmente ao centro da base. Com isso, as geratrizes têm comprimentos diferentes ao longo da base, resultando em um cone inclinado.
- Cone circular: é o caso mais comum, no qual a base é um círculo perfeito. Tanto os cones retos quanto os oblíquos podem ter base circular.
- Cone truncado: é um cone que teve sua parte superior cortada por um plano paralelo à base, formando duas bases circulares — uma maior e outra menor. Esse tipo é muito usado em engenharia e design de objetos.

Fórmulas do Cone Circular Reto

Área da Base (Ab):

A base do cone é um círculo.

$$Ab = \pi r^2$$

onde r é o raio da base.

Área Lateral (Al):

É a área da superfície curva do cone.

$$Al = \pi r g$$

onde g é a geratriz do cone.

Área Total (At):

É a soma da área da base com a área lateral.

$$At = Ab + Al = \pi r^2 + \pi r g = \pi r(r + g)$$

Volume (V):

O volume do cone é um terço do volume de um cilindro com a mesma base e altura:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

onde h é a altura do cone.

EXERCÍCIOS:

1. Um cone tem raio da base igual a 4 cm e altura igual a 9 cm. Calcule o volume do cone.
2. Um cone reto tem raio da base 6 cm e altura 8 cm. Calcule a área total da superfície do cone (área da base + área lateral).
3. Um cone tem raio da base 5 cm e altura 12 cm. Calcule o comprimento da geratriz do cone
4. O volume de um cone é de 150 cm^3 e o raio da base mede 5 cm. Qual é a altura do cone?
5. Um cone tem altura de 10 cm e geratriz de 13 cm. Qual é o raio da base?

8) ESFERA

A esfera é uma figura geométrica tridimensional que exerce papel essencial tanto na matemática quanto nas ciências naturais. Sua principal característica é o fato de todos os seus pontos pertencerem a uma mesma distância de um ponto fixo central, denominado centro. Essa distância constante é conhecida como raio.

De maneira mais intuitiva, pode-se entender a esfera como a "casca" que envolve uma bola. Isto é, ela representa apenas a superfície externa desse corpo, e não seu interior. Esse aspecto a distingue da bola propriamente dita, que inclui todo o volume interno delimitado pela superfície esférica.

Elementos da esfera

Ela é definida como o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma mesma distância de um ponto fixo, chamado centro (C). Essa distância constante entre o centro e qualquer ponto da superfície esférica é denominada raio (r). A partir do raio, também se define o diâmetro (d), que é o segmento de reta que passa pelo centro e une dois pontos opostos da esfera. Por definição, o diâmetro é o dobro do raio, ou seja, $d = 2r$.

Propriedades da esfera

Diferente de outras figuras tridimensionais, a esfera não possui arestas nem vértices, uma vez que sua superfície é completamente lisa e contínua. Essa ausência de elementos pontiagudos ou linhas de encontro entre faces contribui para sua forma suave e arredondada.

Matematicamente, a esfera pode ser considerada um caso particular do elipsóide, uma figura em que os três raios (ou semieixos) podem ter comprimentos diferentes. No caso da esfera, porém, todos os raios são iguais, o que garante sua perfeita simetria e forma esférica.

Fórmulas importantes

A área da superfície da esfera é dada pela fórmula:

$$A = 4\pi r^2$$

onde:

- A é a área da superfície,
- r é o raio da esfera,
- π é a constante matemática aproximadamente igual a 3,1416.

Volume da esfera

O volume da esfera, ou o espaço ocupado dentro da esfera, é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

onde:

- V é o volume,
- r é o raio.

No cotidiano, a esfera está presente em diversos objetos, como bolas de futebol, gotas de água e até mesmo planetas, que possuem uma forma aproximadamente esférica devido à força da gravidade. Já na ciência, a esfera é utilizada como modelo para estudar planetas, estrelas e para realizar análises em física e química. Na matemática, o estudo da esfera é fundamental para compreender superfícies e volumes em geometria analítica e cálculo.

Além disso, a esfera pode ser relacionada a outras figuras geométricas. Na geometria bidimensional, a figura correspondente à esfera é o círculo. Já uma semiesfera é a metade de uma esfera, obtida ao cortar a esfera por um plano que passa pelo seu centro, dividindo-a em duas partes iguais.

Assim, a esfera é uma figura fundamental tanto na teoria quanto na prática, possuindo aplicações que vão desde o estudo abstrato da geometria até o entendimento do universo

EXERCÍCIOS:

1. Uma esfera tem raio de 7 cm. Calcule:

- a) O volume da esfera.
 - b) A área da superfície da esfera.
2. Qual é o raio de uma esfera que possui volume igual a $288\pi \text{ cm}^3$?
3. Uma esfera foi dividida em duas partes por um plano que passa pelo centro da esfera. Se o raio da esfera é 10 cm, qual é a área da superfície de cada uma das partes?
4. Se uma esfera tem área da superfície igual a 314 cm^2 , qual é o seu volume?
5. Duas esferas têm raios em proporção 2:3. Qual é a razão entre seus volumes?

CONCLUSÃO

Ao final desta jornada pela Geometria, é fundamental refletirmos sobre o quanto essa área da Matemática vai além do simples uso de fórmulas. Ao estudarmos todo o ciclo básico, retas, ângulos, polígonos, triângulos, semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo, trigonometria no triângulo qualquer, círculo e circunferência, áreas, geometria espacial, poliedros, poliedros de Platão, poliedros convexos e não convexos, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas, desenvolvemos muito mais do que a habilidade de calcular: desenvolvemos visão plana, espacial, pensamento lógico e raciocínio estratégico, competências essenciais tanto para o vestibular quanto para os desafios da vida acadêmica e profissional.

Nos principais vestibulares, a Geometria aparece de forma constante e, muitas vezes, integrada a outras áreas da Matemática. A interpretação correta de figuras, o entendimento das relações métricas e a aplicação de teoremas e propriedades são recursos valiosos para resolver questões com agilidade e precisão.

Mais importante do que decorar fórmulas é saber quando e por que utilizá-las, reconhecendo as propriedades das figuras e a lógica por trás de cada situação-problema. O estudante que compreende a estrutura da Geometria ganha confiança e domínio para enfrentar questões de maior complexidade.

Se em algum momento deste percurso você se sentiu desafiado, lembre-se: a dificuldade é parte natural do processo de aprendizagem. O essencial é seguir praticando, revisando e resolvendo questões com atenção, pois é na repetição consciente que o conhecimento se consolida.

A Geometria, com sua beleza e precisão, é uma aliada poderosa no seu caminho rumo à aprovação. Continue firme, com foco, estratégia e confiança.

Matheus Malvino

Realização:



Patrocínio:



Integração
Metropolitana



Projeto Gráfico:





Programa de
**Capacitação
e Integração
de Lideranças
 Sociais**