



Programa de
**Capacitação
e Integração
de Lideranças
Sociais**

ÁLGEBRA

CIÊNCIAS EXATAS

Realização:



Patrocínio:

Integração
Metropolitana



APRESENTAÇÃO

As apostilas para pré-vestibulares populares, sociais e comunitários do **PECEP** (Projeto de Ensino Cultural e Educação Popular) foram produzidas no âmbito do **Programa de Capacitação e Integração de Lideranças Sociais**, projeto contemplado pelo edital Integra Rio, uma realização da Secretaria Especial de Integração Metropolitana (SEIM) e da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro.

Essas apostilas representam uma conquista coletiva dos cursinhos e educadores populares de todo o país, afinal, representam uma ferramenta concreta para a democratização do acesso ao material didático. Elas foram pensadas com carinho e compromisso para dialogar com a realidade das centenas de iniciativas populares espalhadas pelo Brasil e, também com aqueles que pensam em iniciar a luta de fundar o seu próprio pré-vestibular.

Sabemos que cada cursinho tem suas particularidades e dinâmicas próprias. Alguns, inclusive, elaboram seu próprio material didático. As apostilas do PECEP não têm como objetivo substituir esses esforços, muito menos propor uma padronização da prática pedagógica popular. Ao contrário, elas foram pensadas para que cursinhos, coletivos, educadores e líderes comunitários possam mitigar certas falhas aos quais podem estar suscetíveis.

Por exemplo, um professor de português que deseje iniciar um pré-vestibular, mas ainda não professores de outras áreas, pode usar essas apostilas como ponto de partida para que os estudantes não fiquem sem material de estudo. Da mesma forma, um educador que esteja começando a lecionar biologia, também pode usar as apostilas como material de apoio.

Importante ressaltar que tais apostilas foram elaboradas por voluntários de um pré-vestibular que funciona, de forma ininterrupta, há 25 anos na cidade do Rio de Janeiro. Ou seja, trazem em suas páginas o olhar atento e sensibilidade de quem está na linha de frente da luta por transformação através da educação.

Essas apostilas não tem a pretensão de serem uma solução definitiva. Elas são um passo importante em um caminho longo, penoso, porém, infinitamente recompensante.

Por fim, importante ressaltar que esta é a versão 2025 das nossas apostilas. A proposta é que esse material siga sendo desenvolvido e aprimorado de forma contínua, afinal, o aprendizado sobre o ensino popular não tem fim.

Se você tiver sugestões, críticas, dúvidas ou ideias, entre em contato com a gente pelo e-mail: **contato@pecep.org** e acompanhe as nossas redes sociais: **@pecep.org**

Com muito carinho,

A Direção do PECEP

PREFÁCIO

A Álgebra é uma das ferramentas mais poderosas do conhecimento humano e seu valor ultrapassa as fronteiras entre as disciplinas. Fenômenos naturais e humanos, dos mais simples aos mais complexos, são frequentemente descritos e compreendidos por meio de funções matemáticas. Praticamente toda pesquisa científica é sustentada por fundamentos estatísticos e probabilísticos. Até mesmo áreas de ponta como a Inteligência Artificial têm a Álgebra como base, já que muitos de seus algoritmos envolvem maximizar ou minimizar funções para encontrar soluções ideais. Em suma, compreender Álgebra é essencial para entender o mundo, desenvolver novas tecnologias, tomar decisões informadas e participar de forma ativa e crítica na construção do conhecimento em qualquer área.

Mais do que aprender regras e fórmulas, estudar Álgebra é uma oportunidade de se libertar dos estereótipos que tantas vezes cercam a Matemática. Não existe "mente de exatas": existe hábito, prática e, acima de tudo, abertura para aprender. Convidamos você a entrar neste estudo com confiança e curiosidade. Ao longo do caminho, você perceberá que é capaz de compreender ideias abstratas, resolver problemas e construir argumentos com segurança. A Matemática pode, sim, ser um lugar de empoderamento: um espaço para fortalecer o raciocínio, a autonomia intelectual e a crença no seu próprio potencial.

Agradecemos ao PCILS (Programa de Capacitação e Integração de Lideranças Sociais) e a Secretaria Municipal de Educação pelo apoio, confiança e parceria na luta por uma educação pública, gratuita, de qualidade e popular.

Assinam esta produção a professora Maria Luiza C. Wuillaume e o professor Matheus Malvino.

Desejo a você uma excelente jornada de estudos. Que esta apostila seja uma ferramenta útil na sua caminhada rumo ao conhecimento e à conquista dos seus objetivos.

Boa leitura e bons estudos!

SUMÁRIO

1) NOÇÕES DE FUNÇÃO	5
2) FUNÇÕES DE PRIMEIRO GRAU	17
3) FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU (PARTE 1)	32
4) FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU (PARTE 2)	45
5) PROGRESSÕES	59
6) ANÁLISE COMBINATÓRIA	76
7) PROBABILIDADE	89
8) ESTATÍSTICA	104
9) JUROS	119

1) NOÇÕES DE FUNÇÃO

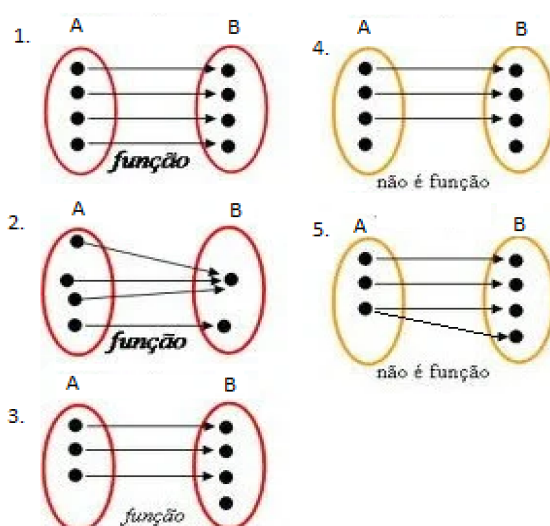
INTRODUÇÃO

Este material apresenta o conceito de função e suas principais características, com foco na compreensão de como relacionar variáveis de maneira lógica e estruturada. Serão explorados os diferentes tipos de funções quanto à sua classificação, como injetoras, sobrejetoras e bijetoras, bem como suas propriedades fundamentais. Também será abordada a representação gráfica das funções, ferramenta indispensável para a análise e resolução de problemas em contextos matemáticos e práticos.

O QUE É UMA FUNÇÃO?

Uma função é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto A (domínio) exatamente um elemento de um conjunto B (contradomínio/imagem). Para que uma relação seja considerada função, duas condições devem ser satisfeitas:

- Todo elemento do conjunto A (domínio) deve estar relacionado a **algum** elemento de B .
- Nenhum elemento de A pode estar relacionado a **mais de um** elemento de B ,



Na imagem:

- (4) não é função, pois existe um elemento em A que não está associado a um elemento em B .

- (5) não é função, pois existe um elemento em A associado a mais de um elemento em B .

Exemplo de relação que **não é uma função**

Considere a equação da circunferência de raio 1 e centro na origem:

$$x^2 + y^2 = 1$$

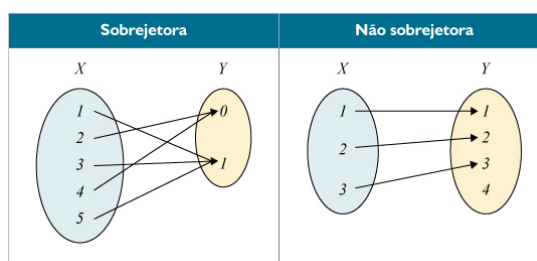
Para um mesmo valor de x , como por exemplo $x = 0$, existem dois valores distintos de y :

$$y = +1 \quad \text{e} \quad y = -1$$

Portanto, essa relação **não é uma função**,

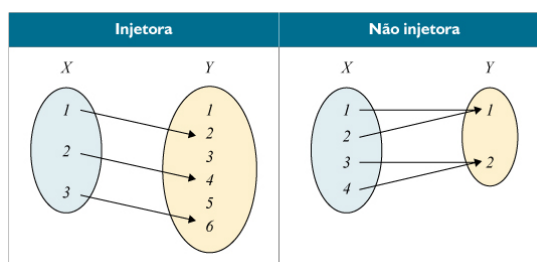
FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se **todo elemento de B é imagem de algum elemento de A** .



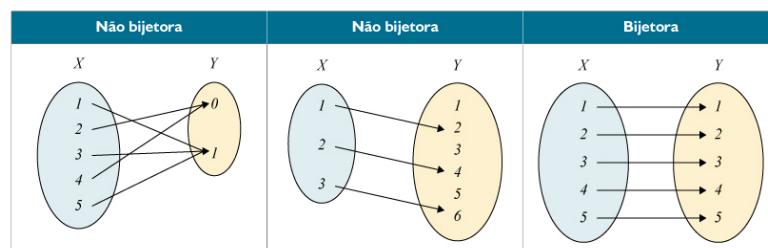
FUNÇÃO INJETORA

Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se **elementos distintos de A possuem imagens distintas em B** .



FUNÇÃO BIJETORA

Uma função é bijetora quando é simultaneamente injetora e sobrejetora.



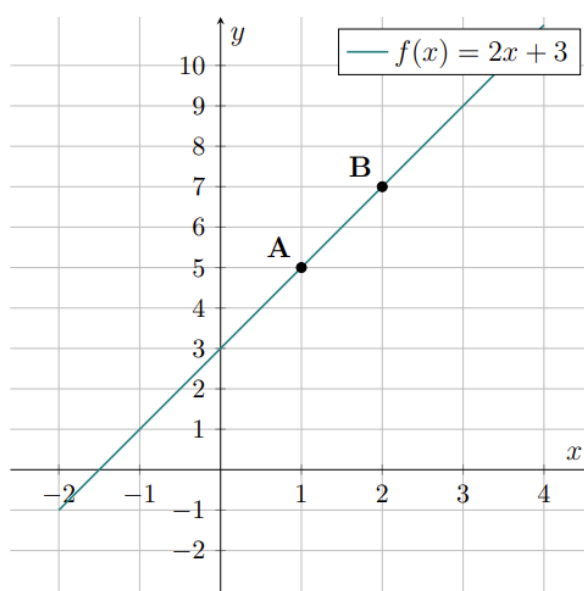
EXEMPLOS DE FUNÇÕES

67314e Exemplo 1

$$f(x) = 2x + 3 \text{ ou } y = 2x + 3$$

Para $x = 1$, temos $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Para $x = 2$, temos $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$.



Esta função é **crescente**, pois valores maiores de x resultam em valores maiores de $y/f(x)$.

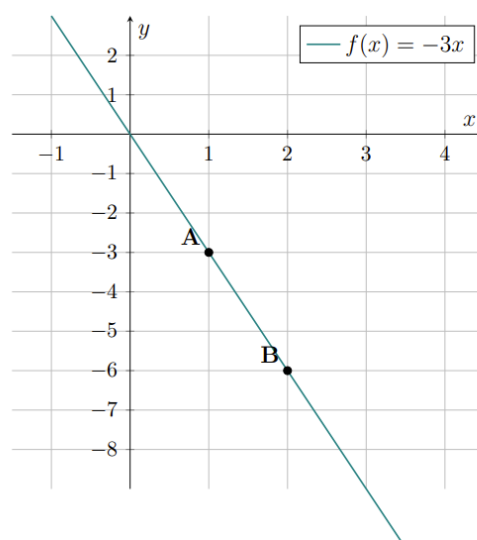
Além disso, trata-se de uma **função afim**, pois possui a forma geral $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Como o valor de ($a > 0$) podemos afirmar que a função é **crescente** antes mesmo de olhar o gráfico.

Exemplo 2

$$f(x) = -3x \text{ ou } y = -3x$$

Para $x = 1$, temos $f(1) = -3 \cdot 1 = -3$.

Para $x = 2$, temos $f(2) = -3 \cdot 2 = -6$.



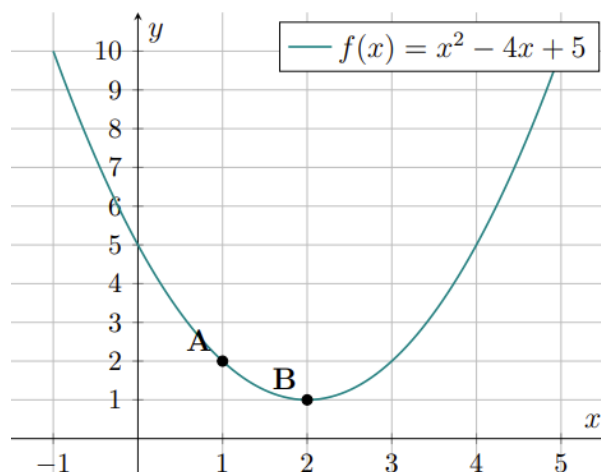
Esta função é **decrescente**, pois valores maiores de x resultam em valores menores de $y/f(x)$. Trata-se de uma **função linear**, pois está na forma $f(x) = ax$ com $a \neq 0$, e também é uma **função afim**, sendo um caso particular em que o termo constante b é igual a zero.

Exemplo 3

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ ou } y = x^2 - 4x + 5$$

Para $x = 1$, temos $f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$.

Para $x = 2$, temos $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$.



A função é **quadrática**, pois possui a forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$.

EXERCÍCIOS

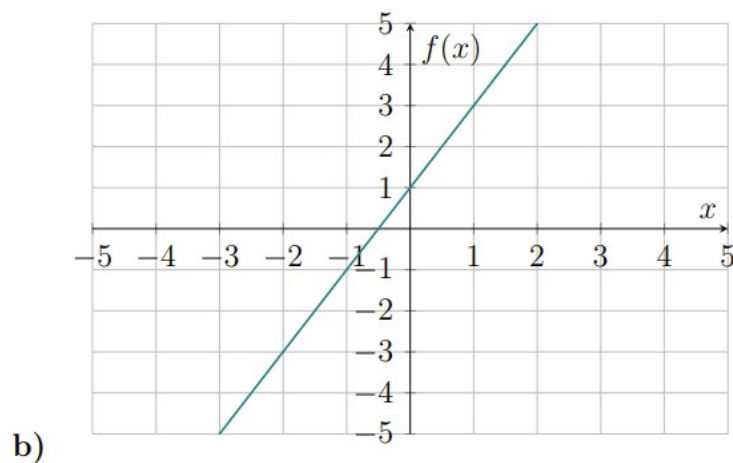
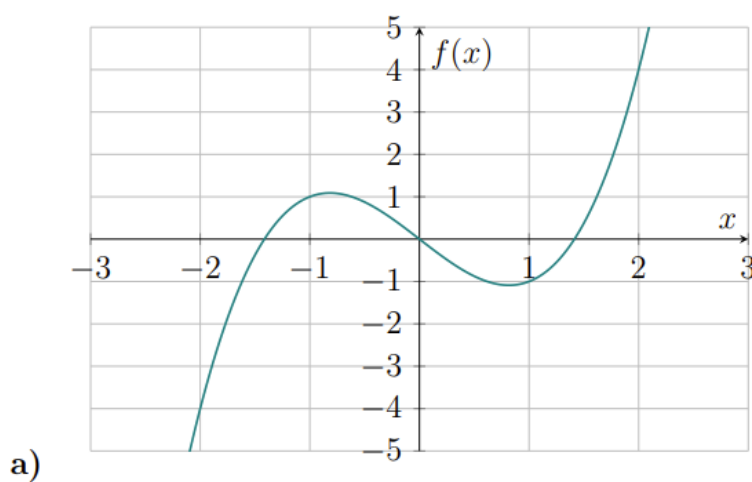
1. Analise cada equação abaixo e determine:
 - Se define uma função $y = f(x)$;
 - Se for uma função, classifique-a como: injetora, sobrejetora ou bijetora.
 - a. $y = 2x + 1$
 - b. $y^2 = x$
 - c. $x^2 + y^2 = 1$
 - d. $y = x^2 - 4x + 5$

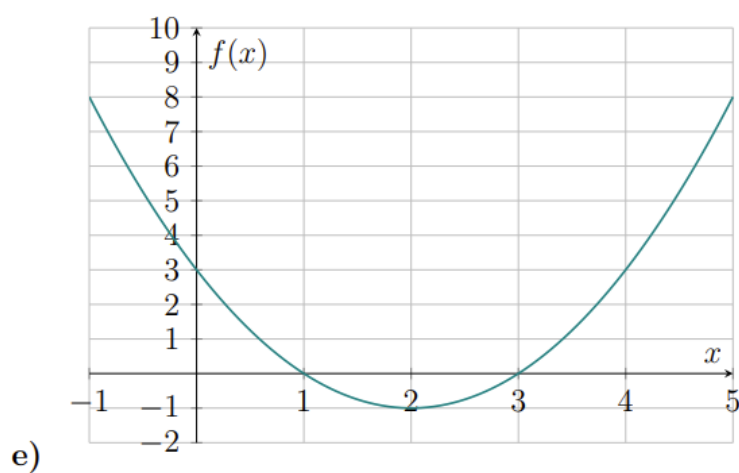
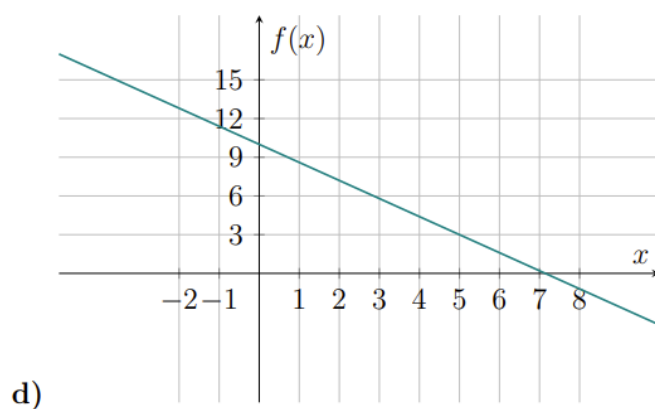
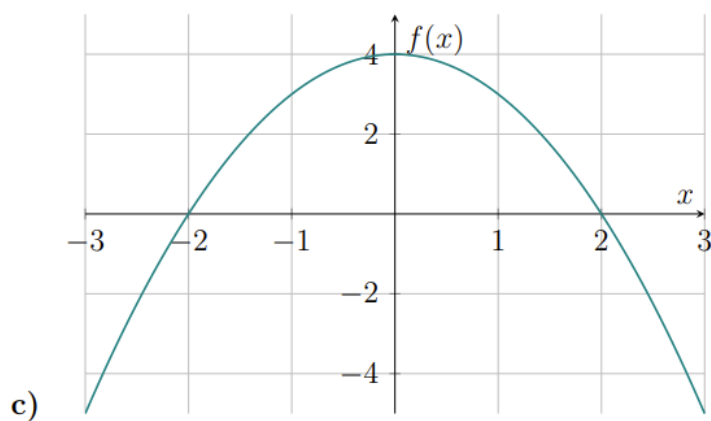
2. Considere as funções abaixo. Para cada uma:
 - Calcule o valor de y correspondente ao valor indicado de x ;
 - Classifique a função como: **linear**, **afim** ou **quadrática**;
 - Se for linear ou afim, indique se ela é **crescente** ou **decrecente**.
 - a. $f(x) = -2x + 5$, para $x = 3$
 - b. $g(x) = 4x$, para $x = -1$
 - c. $h(x) = x^2 - 6x + 8$, para $x = 2$

3. Abaixo estão 5 funções e 5 gráficos embaralhados. Associe corretamente cada função ao gráfico que a representa:

- a. $f_1(x) = 2x + 1$
- b. $f_2(x) = -\frac{7}{5}x + 10$
- c. $f_3(x) = x^2 - 4x + 3$
- d. $f_4(x) = -x^2 + 4$
- e. $f_5(x) = x^3 + -2x$

Considere os gráficos:





EXERCÍCIOS DESAFIO

1. (ENEM 2017 — PPL)

No primeiro ano do Ensino Médio de uma escola, é hábito os alunos dançarem quadrilha na

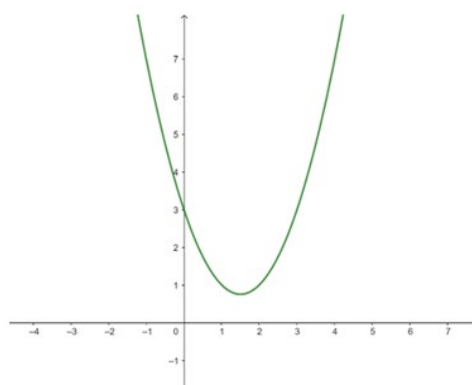
festa junina. Neste ano, há 12 meninas e 13 meninos na turma, e para a quadrilha foram formados 12 pares distintos, compostos por uma menina e um menino. Considere que as meninas sejam os elementos que compõem o conjunto A e os meninos, o conjunto B , de modo que os pares formados representem uma função f de A em B .

Com base nessas informações, a classificação do tipo de função que está presente nessa relação é:

- A. f é injetora, pois para cada menina pertencente ao conjunto A está associado um menino diferente pertencente ao conjunto B .
- B. f é sobrejetora, pois cada par é formado por uma menina pertencente ao conjunto A e um menino pertencente ao conjunto B , sobrando um menino sem formar par.
- C. f é injetora, pois duas meninas quaisquer pertencentes ao conjunto A formam par com um mesmo menino pertencente ao conjunto B , para envolver a totalidade de alunos da turma.
- D. f é bijetora, pois dois meninos quaisquer pertencentes ao conjunto B formam par com uma mesma menina pertencente ao conjunto A .
- E. f é sobrejetora, pois basta que uma menina do conjunto A forme par com dois meninos pertencentes ao conjunto B , assim nenhum menino ficará sem par.

2. (UNEMAT 2024)

A figura a seguir representa o gráfico de uma função.



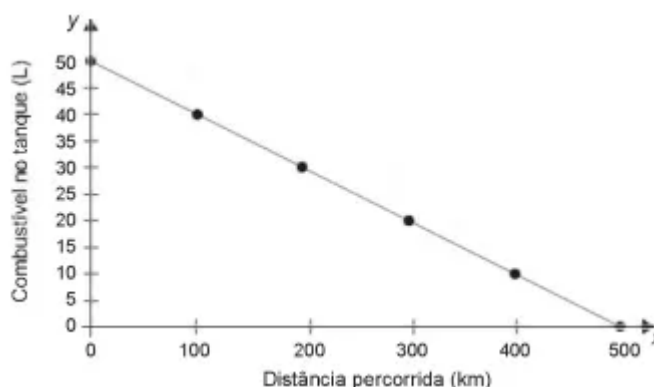
Assinale a alternativa que apresenta a lei de formação da função representada na figura:

- A. $y = 3x^2 - 3x - 3$
- B. $y = x^2 + 3x - 3$

- C. $y = x^2 - 3x - 3$
- D. $y = x^2 - 3x + 3$
- E. $y = -x^2 - 3x + 3$

3. (ENEM 2018)

Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

- A. $y = -10x + 500$
- B. $y = -\frac{x}{10} + 50$
- C. $y = -\frac{x}{10} + 500$
- D. $y = \frac{x}{10} + 50$
- E. $y = \frac{x}{10} + 500$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1. Análise de equações:

a. $y = 2x + 1$

É uma função, pois para cada valor de x há um único valor de y .

Classificação: **bijetora** (é injetora e sobrejetora).

b. $y^2 = x$

Não é uma função, pois um mesmo valor de x pode estar associado a dois valores de y (um positivo e um negativo).

c. $x^2 + y^2 = 1$

Não é uma função. Trata-se da equação de uma circunferência. Para um mesmo valor de x , existem dois valores de y .

d. $y = x^2 - 4x + 5$

É uma função quadrática (parábola voltada para cima).

Classificação: **não injetora, não sobrejetora** em $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Logo, não é bijetora.

2. Cálculo de valores e classificação das funções:

a. $f(x) = -2x + 5$, para $x = 3$

Cálculo: $f(3) = -2 \cdot 3 + 5 = -6 + 5 = -1$

Tipo: função afim

Comportamento: **decrecente**

b. $g(x) = 4x$, para $x = -1$

Cálculo: $g(-1) = 4 \cdot (-1) = -4$

Tipo: função linear

Comportamento: **crescente**

c. $h(x) = x^2 - 6x + 8$, para $x = 2$

Cálculo: $h(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$

Tipo: função quadrática

3. Correspondências: $f_1 \rightarrow b$, $f_2 \rightarrow d$, $f_3 \rightarrow e$, $f_4 \rightarrow c$ e $f_5 \rightarrow a$,

RESOLUÇÃO DESAFIO

1. (ENEM 2017 — PPL)

A função f associa cada menina (elemento do conjunto A , com 12 elementos) a um menino (elemento do conjunto B , com 13 elementos), sem repetições. Ou seja, cada menina está associada a um menino distinto. Assim:

- É uma função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B .
- Como nenhuma menina compartilha o mesmo menino, a função é **injetora**.
- Como sobra um menino, a função **não é sobrejetora**.
- Portanto, a alternativa correta é: **A**.

2. (UNEMAT 2024)

O gráfico fornecido é de uma parábola. Ao analisar os pontos de interseção $(0, 3)$, só sobram as alternativas D e E, como para $x=1$, a única alternativa com y positivo é a D. Observamos que a função corresponde a:

$$f(x) = x^2 - 3x + 3$$

Portanto, a alternativa correta é: **D**.

3. (ENEM 2018)

O gráfico mostra uma reta decrescente, partindo de 50 litros (quando $x = 0$) e chegando a 0 litros após 500 km. Esses dois pontos são:

$$(0, 50) \quad \text{e} \quad (500, 0)$$

Que satisfazem a equação:

$$y = -\frac{1}{10}x + 50$$

Portanto, a alternativa correta é: **B**.

CONCLUSÃO

O conceito de função é fundamental para avançar nos estudos de Matemática, especialmente em temas recorrentes no vestibular. De forma geral, uma função é uma relação entre duas variáveis, em que a cada valor de entrada (geralmente representado por x) corresponde exatamente um valor de saída (representado por y ou $f(x)$).

Ao estudar noções de função, começamos a identificar essa relação em situações do cotidiano, como o tempo gasto em uma viagem em função da velocidade, ou o valor a pagar em uma conta de energia elétrica em função do consumo. Para representar essas funções, usamos tabelas de valores, expressões algébricas e, principalmente, gráficos no plano cartesiano.

O gráfico de uma função é uma ferramenta poderosa para visualizar o comportamento da relação entre as variáveis. Ele nos permite analisar rapidamente se a função cresce, decresce ou é constante, além de facilitar a identificação de pontos importantes, como onde a função cruza os eixos x e y .

A partir dessas noções iniciais, avançamos para o estudo de uma das funções mais importantes para a resolução de problemas em vestibulares: a função do primeiro grau. Essa função é representada pela fórmula geral:

$$f(x) = ax + b$$

Nessa equação, o número a é chamado de coeficiente angular, e indica a inclinação da reta no gráfico, ou seja, se a função está crescendo ($a > 0$) ou decrescendo ($a < 0$). Já o número b é o coeficiente linear, que representa o ponto onde a reta corta o eixo y (valor de $f(x)$ quando $x = 0$).

O gráfico da função do primeiro grau é sempre uma reta, e a interpretação geométrica dos seus coeficientes permite resolver problemas de forma mais rápida e eficiente. Questões de vestibular frequentemente envolvem situações práticas modeladas por esse tipo de função, como variações de preços, distâncias, lucros e outras relações lineares.

2) FUNÇÕES DE PRIMEIRO GRAU

INTRODUÇÃO

A função do primeiro grau é uma das mais simples e importantes funções matemáticas, sendo amplamente utilizada para representar relações lineares entre duas variáveis. Seu estudo permite compreender como determinadas grandezas variam de forma constante, o que é essencial para a interpretação de situações cotidianas e resolução de problemas práticos. Neste material, exploraremos suas principais características, como o comportamento crescente ou decrescente, o significado geométrico de seus elementos e sua representação gráfica por meio de uma reta, com foco especial em questões típicas de vestibulares e do ENEM.

DEFINIÇÃO

Uma função de primeiro grau é uma função da forma:

$$f(x) = ax + b \quad \text{ou} \quad y = ax + b$$

Onde:

- a é chamado de **coeficiente angular**, pois determina a inclinação da reta.
- b é chamado de **coeficiente linear**, pois representa o ponto em que a reta intercepta o eixo y .

CALCULANDO VALORES EM UMA FUNÇÃO DE PRIMEIRO GRAU

Uma função de primeiro grau relaciona cada valor de x a um valor correspondente de y .

1. Descobrindo o valor de y dado x

Dado um valor para x , basta substituir esse valor na equação da função para encontrar y (ou $f(x)$).

Exemplo: Considere a função $f(x) = 2x + 1$. Vamos calcular o valor de $f(3)$:

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$$

Assim, quando $x = 3$, $f(3) = 7$.

2. Descobrimos o valor de x dado y

Se soubermos o valor de y , podemos encontrar o valor de x resolvendo uma equação.

Exemplo: Ainda usando a função $y = 2x + 1$, queremos saber qual valor de x gera $y = 7$:

$$7 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 7 - 1 = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Assim, quando $y = 7$, temos $x = 3$.

Essas operações são úteis tanto para traçar gráficos quanto para resolver problemas envolvendo funções lineares.

DETERMINANDO a E b A PARTIR DE DOIS PONTOS

1. Usando as fórmula

- O **coeficiente angular** a é dado por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo: Dados os pontos (2,5) e (4,9):

$$a = \frac{9 - 5}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

Agora que sabemos que $a = 2$, usamos um dos pontos (por exemplo, (2,5)) na equação $y = ax + b$ para encontrar b :

$$5 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow 5 = 4 + b \Rightarrow b = 1$$

Portanto, a função é:

$$y = 2x + 1$$

2. Usando um sistema de equações

Como a função é da forma $y = ax + b$, substituímos os dois pontos para formar um sistema:

$$\text{Usando (2,5): } 5 = 2a + b \quad (\text{Equação 1})$$

$$\text{Usando (4,9): } 9 = 4a + b \quad (\text{Equação 2})$$

Subtraindo a Equação 1 da Equação 2:

$$(4a + b) - (2a + b) = 9 - 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

Substituímos agora $a = 2$ na Equação 1:

$$5 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow 5 = 4 + b \Rightarrow b = 1$$

Portanto, a função é:

$$y = 2x + 1$$

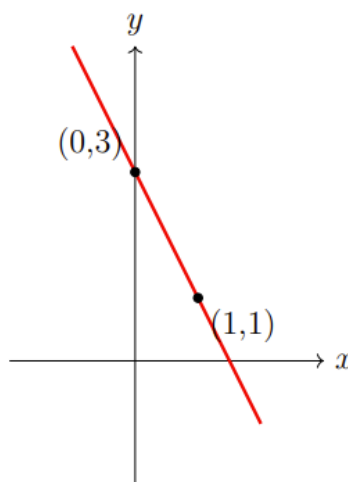
GRÁFICO DAS FUNÇÕES

O gráfico de uma função de primeiro grau é sempre uma reta.

A inclinação da reta é determinada pelo coeficiente angular a :

- Quando $a > 0$, a reta é **crescente**: os valores de y aumentam à medida que x aumenta.
- Quando $a < 0$, a reta é **decrescente**: os valores de y diminuem à medida que x aumenta.
- Quando $a = 0$, a função é constante, e o gráfico é uma reta horizontal.

Exemplo 1: Encontrando a função a partir do gráfico



Coeficiente angular:

$$a = \frac{1 - 3}{1 - 0} = -2$$

Para encontrar o coeficiente linear b , basta observar o ponto em que a reta intercepta o eixo y . No gráfico, vemos que a função passa pelo ponto $(0,3)$. Isso significa que quando $x = 0$, temos $y = b$, ou seja:

$$b = 3$$

Portanto, a função é:

$$y = -2x + 3$$

Como o coeficiente angular $a = -2$ é negativo, a função é **decrecente**, ou seja, os valores de y diminuem à medida que x aumenta.

Exemplo 2: Desenhando o gráfico a partir da função

Considere a função $y = -x + 2$.

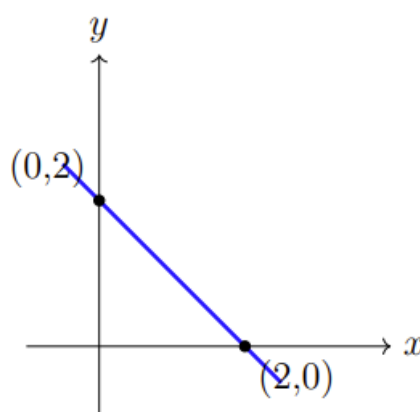
Sabemos que:

- O coeficiente angular é $a = -1$, indicando que a função é **decrecente**.
- O coeficiente linear é $b = 2$, ou seja, a reta intercepta o eixo y no ponto $(0,2)$.

Vamos encontrar mais um ponto para traçar a reta. Por exemplo, quando $x = 2$:

$$y = -2 + 2 = 0 \Rightarrow (2,0)$$

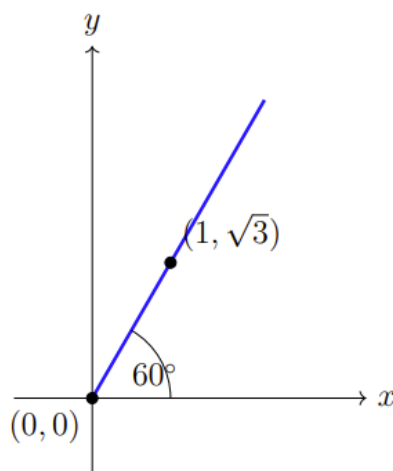
Com isso, podemos representar graficamente:



A reta passa pelos pontos $(0,2)$ e $(2,0)$.

Exemplo 3: Encontrando a função a partir do gráfico e do ângulo com o eixo x

Observe o gráfico a seguir. A reta passa pela origem e forma um ângulo de 60° com o eixo x :



O coeficiente angular a é dado pela tangente do ângulo θ com o eixo x :

$$a = \tan(\theta)$$

Como o ângulo é $\theta = 60^\circ$, temos:

$$a = \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$$

Além disso, como a reta passa pela origem, temos:

$$b = 0$$

Portanto, a equação da reta é:

$$y = \sqrt{3}x$$

Como $a > 0$, a função é **crescente**, ou seja, os valores de y aumentam à medida que x aumenta.

RAÍZES DE UMA FUNÇÃO DE PRIMEIRO GRAU

A raiz de uma função do primeiro grau é o valor de x que torna $f(x) = 0$ ou $y = 0$.

Exemplo:

$$y = 2x - 4 \Rightarrow 0 = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$$

A raiz da função é $x = 2$.

INTERSEÇÃO DE FUNÇÕES DE PRIMEIRO GRAU

Para encontrar a interseção entre duas funções de primeiro grau, igualamos suas expressões.

Exemplo:

$$y = 2x + 1 \quad \text{e} \quad y = -x + 4$$

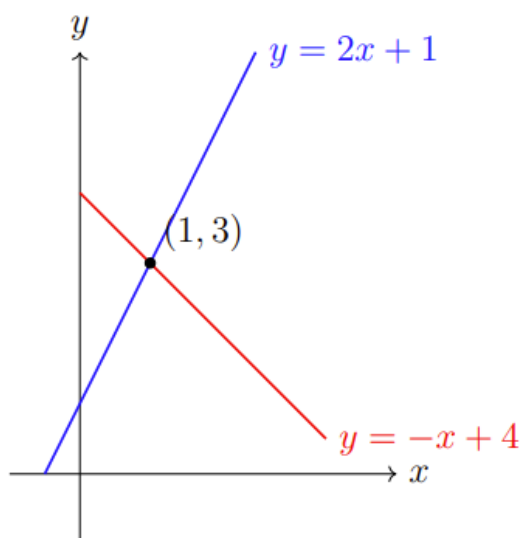
Igualando:

$$2x + 1 = -x + 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Substituindo em qualquer equação:

$$y = 2(1) + 1 = 3$$

As funções se intersectam no ponto (1,3).



EXERCÍCIOS

Exercício 1:

Considere a função $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Resolva os itens abaixo:

1. Sabendo que $x = 4$, calcule $f(x)$.

2. Calcule o valor de $f(6)$.
3. Sabendo que $f(x) = \frac{5}{4}$, calcule o valor de x .
4. Sabendo que $y = -\frac{1}{4}$, calcule o valor de x .

Exercício 2:

Encontre a função do primeiro grau $f(x) = ax + b$ que passa pelos dois pontos indicados em cada item:

1. A função passa pelos pontos $(1,2)$ e $(3,6)$.
2. A função passa pelos pontos $(-2,5)$ e $(2,-3)$.
3. A função passa pelos pontos $(\frac{1}{2}, 1)$ e $(2,4)$.

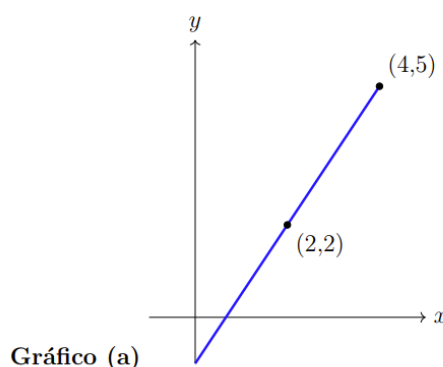
Exercício 3:

Represente graficamente as funções abaixo:

1. $f(x) = -x + 4$
2. $g(x) = 2$
3. $h(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

Exercício 4:

Observe os gráficos abaixo. Cada um representa uma função do primeiro grau. Com base nos dois pontos destacados em cada gráfico, determine a equação da função $f(x) = ax + b$.



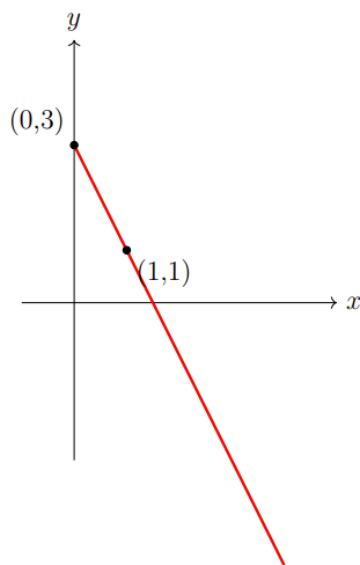


Gráfico (b)

Exercício 5:

Em cada item, determine o ponto de interseção entre as duas funções dadas.

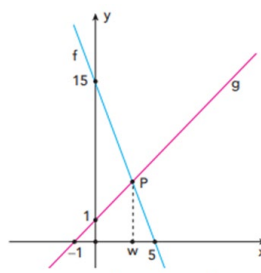
1. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ e $g(x) = -x + 4$
2. $f(x) = -2x + 5$ e $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$
3. $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 5$

EXERCÍCIOS DESAFIO

Exercício 1 – UERJ 2023

(Vestibular Estadual 2024 – 1º Exame de Qualificação)

Observe o plano cartesiano, no qual estão representadas as funções f e g :



O ponto P de interseção entre os gráficos dessas funções possui abscissa w , cujo valor é:

- A. $\frac{5}{2}$
- B. 3
- C. $\frac{7}{2}$
- D. 4

Exercício 2 – UERJ 2024

Um professor precisou ajustar as notas x de seus alunos, transformando-as em y , por meio da equação:

$$y = ax + b$$

Dessa forma:

- A maior nota original, $x = 60$, passou a ser $y = 100$
- A menor nota original, $x = 10$, passou a ser $y = 60$

Com base nessa transformação, o aluno que tirou $x = 30$ teve sua nota alterada para:

- A. 72
- B. 74
- C. 76
- D. 78

Exercício 3 – FUNCERN 2025

Uma empresa que fabrica camisas personalizadas recebeu um pedido de um bloco de rua para criar camisas exclusivas para o Carnaval de Recife. O custo total de produção, em reais, é dado pela função $C(x) = 30x + 750$, em que x é o número de camisas vendidas. A receita total obtida com a venda das camisas é dada pela função $R(x) = 45x$, em que x também representa a quantidade de camisas vendidas.

Qual o número mínimo de camisas que a empresa precisa vender para evitar prejuízo?

- A. 25
- B. 50
- C. 135
- D. 1 125
- E. 2 250

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 1:

1. $f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{3}{4} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$
2. $f(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow x = 4$
4. $y = -\frac{1}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$

Exercício 2:

1. **Usando a fórmula:** $a = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$. Substituindo em $y = ax + b$ com o ponto (1,2):

$$2 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = 2x$$

2. **Usando sistema:**

$$5 = -2a + b \quad (1)$$

$$-3 = 2a + b \quad (2)$$

Subtraindo (2) - (1):

$$-3 - 5 = (2a + b) - (-2a + b) \Rightarrow -8 = 4a \Rightarrow a = -2$$

Substituindo em (1): $5 = -2(-2) + b \Rightarrow 5 = 4 + b \Rightarrow b = 1$

Logo, $f(x) = -2x + 1$

3. **Usando a fórmula:** $a = \frac{4-1}{2-1/2} = \frac{3}{3/2} = 2$.

Substituindo (1/2,1): $1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + b \Rightarrow 1 = 1 + b \Rightarrow b = 0$

Portanto, $f(x) = 2x$

Exercício 3:

Gráfico da função $f(x) = -x + 4$

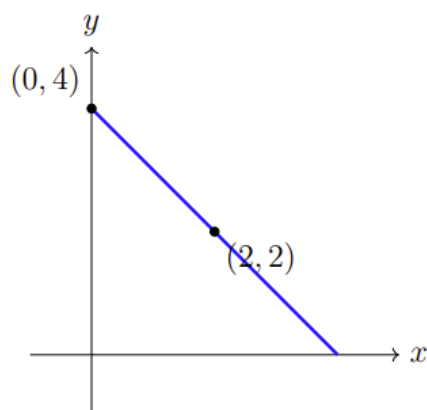


Gráfico da função $g(x) = -x + 4$

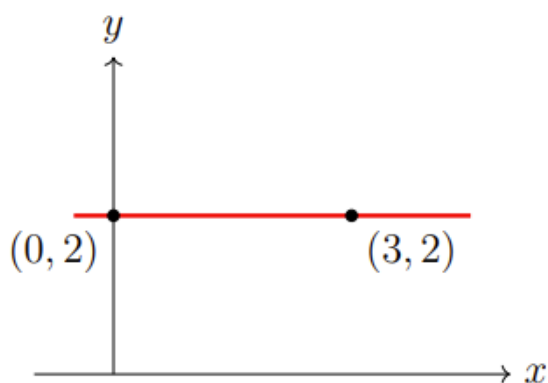
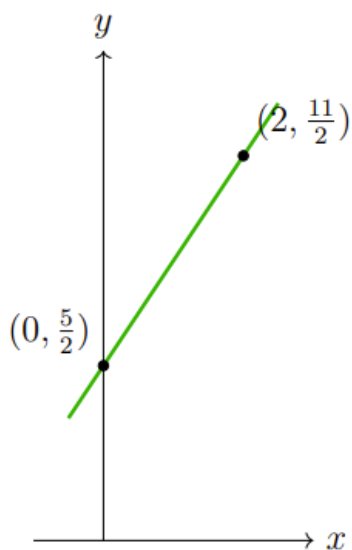


Gráfico da função $h(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$



Exercício 4:

- **Gráfico (a):** Pontos (2,2) e (4,5). $a = \frac{5-2}{4-2} = \frac{3}{2}$. Substituindo:

$$2 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow 2 = 3 + b \Rightarrow b = -1$$

Função: $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$

- **Gráfico (b):** Pontos (0,3) e (1,1). $a = \frac{1-3}{1-0} = -2$, e $b = 3$

Função: $f(x) = -2x + 3$

Exercício 5:

1. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 = -x + 4 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2$. Substituindo em qualquer função:

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2.$$

Interseção: (2,2)

2. $-2x + 5 = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 6 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$. Substituindo:

$$f\left(\frac{12}{5}\right) = -2 \cdot \frac{12}{5} + 5 = -\frac{24}{5} + \frac{25}{5} = \frac{1}{5}$$

Interseção: $\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)$

3. $3x - 2 = 5 \Rightarrow 3x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$. Substituindo:

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = 3 \cdot \frac{7}{3} - 2 = 7 - 2 = 5$$

Interseção: $\left(\frac{7}{3}, 5\right)$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DESAFIO

Resolução do Exercício 1 – UERJ 2023

Queremos descobrir o valor da abscissa w no ponto de interseção das funções f e g , com base no gráfico.

Função f : Pontos conhecidos: (0,15) e (5,0)

Calculando o coeficiente angular:

$$a_f = \frac{0 - 15}{5 - 0} = -3 \Rightarrow f(x) = -3x + 15$$

Função g : Pontos conhecidos: $(-1,0)$ e $(0,1)$

Coeficiente angular:

$$a_g = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = 1 \Rightarrow g(x) = x + 1$$

Determinando o ponto de interseção:

Igualamos as expressões:

$$-3x + 15 = x + 1 \Rightarrow -4x = -14 \Rightarrow x = \frac{14}{4} = \boxed{\frac{7}{2}}$$

Portanto, a abscissa do ponto de interseção é:

$$\boxed{w = \frac{7}{2}}$$

Alternativa correta: C

Resolução do Exercício 2 – UERJ 2024 (usando sistema)

Sabemos que a equação da transformação é:

$$y = ax + b$$

Temos dois pares ordenados:

$$(10,60) \text{ e } (60,100)$$

Substituindo esses valores na equação $y = ax + b$, montamos o seguinte sistema:

$$10a + b = 60 \quad (\text{Equação 1})$$

$$60a + b = 100 \quad (\text{Equação 2})$$

Subtraindo a Equação 1 da Equação 2:

$$(60a + b) - (10a + b) = 100 - 60 \Rightarrow 50a = 40 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

Substituímos o valor de a na Equação 1:

$$10 \cdot \frac{4}{5} + b = 60 \Rightarrow 8 + b = 60 \Rightarrow b = 52$$

Portanto, a função é:

$$y = \frac{4}{5}x + 52$$

Para saber qual foi a nova nota do aluno que tirou $x = 30$:

$$y = \frac{4}{5} \cdot 30 + 52 = 24 + 52 = \boxed{76}$$

Alternativa correta: C

Resolução do Exercício 3 – FUNCERN 2025

Temos:

$$C(x) = 30x + 750 \text{ e } R(x) = 45x$$

Para que não haja prejuízo, a receita deve ser igual ou maior que o custo:

$$R(x) = C(x) \Rightarrow 45x = 30x + 750$$

Subtraindo $30x$ dos dois lados:

$$15x = 750 \Rightarrow x = \frac{750}{15} = \boxed{50}$$

Portanto, o número mínimo de camisas que a empresa deve vender para evitar prejuízo é:

$$\boxed{B) 50}$$

CONCLUSÃO

No estudo das funções, é fundamental entender como cada tipo de função representa diferentes comportamentos matemáticos e situações do cotidiano. A função do primeiro grau, também chamada de função afim, é o ponto de partida desta jornada. Ela é expressa na forma $f(x) = ax + b$ e seu gráfico é sempre uma reta. Essa função representa relações lineares, ou seja, com crescimento ou decrescimento constante, como um salário fixo por hora trabalhada ou o custo de um serviço com taxa fixa mais um valor por unidade.

Depois de entendermos a função do primeiro grau, damos um passo importante rumo à função do segundo grau, representada pela fórmula geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$. Diferente da função linear, essa é uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola. Isso significa que, ao invés de crescer ou decrescer de forma constante, ela apresenta uma

curvatura, com um ponto de máximo (quando a parábola está voltada para baixo) ou mínimo (quando está voltada para cima).

A transição entre essas duas funções marca a evolução da compreensão matemática: passamos de uma visão mais simples e direta (reta) para uma representação mais complexa e rica (parábola), que permite resolver problemas envolvendo movimentos acelerados, valores máximos ou mínimos, lançamentos de objetos, análise de lucro, entre outros. Este tópico será tratado no próximo tema da nossa apostila.

3) FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU (PARTE 1)

INTRODUÇÃO

Ao avançar no estudo das funções, encontramos relações mais complexas entre variáveis, que não seguem um padrão linear. A função do segundo grau é um exemplo clássico dessa complexidade, pois descreve situações em que há variação crescente e decrescente ao longo do tempo. Sua representação gráfica em forma de parábola permite visualizar máximos e mínimos, tornando-se essencial para compreender fenômenos como trajetórias de projéteis, comportamento de lucros em função da produção e análises econômicas. Neste material, vamos explorar como interpretar e aplicar a função quadrática em diferentes contextos, desenvolvendo intuições importantes para a resolução de problemas com variação não constante.

DEFINIÇÃO

Uma função do segundo grau é uma função polinomial da forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a \neq 0$, e $a, b, c \in \mathbb{R}$. O gráfico dessa função é uma parábola.

Dado o valor de x , encontrar o valor de y ou $f(x)$

Basta substituir x na expressão da função.

Exemplo

Considere $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

- $f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1 = 1$
- $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$
- $f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$

Dado o valor de y ou $f(x)$, encontrar o valor de x

Aqui resolvemos a equação:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + (c - y) = 0$$

EQUAÇÕES DO TIPO: $ax^2 + bx + c$

Exemplo 1 – Substituindo $y = 3$

Seja $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Queremos encontrar os valores de x tais que $f(x) = 3$.

Substituímos:

$$3 = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

Resolvendo:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

Logo, os valores de x são $2 + \sqrt{6}$ e $2 - \sqrt{6}$.

EQUAÇÕES DO TIPO: $ax^2 + bx$

Exemplo 2 – Substituindo $y = 0$ (raízes da função)

Seja $f(x) = 2x^2 - 6x$. Queremos os valores de x tais que $f(x) = 0$. Substituímos:

$$0 = 2x^2 - 6x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x - 3) = 0$$

Portanto, as raízes da função são:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

Observação: quando substituirmos $y = 0$, estamos buscando as *raízes da função*, ou seja, os pontos onde o gráfico intercepta o eixo x .

EQUAÇÕES DO TIPO: $ax^2 + c$

Exemplo 3 – Substituindo $y = 5$

Seja $f(x) = x^2 - 4$. Queremos encontrar os valores de x tais que $f(x) = 5$. Substituímos:

$$5 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Logo, os valores de x que satisfazem a equação são $x = -3$ e $x = 3$.

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU

O gráfico de uma função do 2º grau é sempre uma **parábola**.

- Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Isso significa que a função possui um **ponto de mínimo**, ou seja, o menor valor que $f(x)$ pode atingir.
- Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Nesse caso, a função possui um **ponto de máximo**, isto é, o maior valor que $f(x)$ pode atingir.

Elementos importantes no gráfico

- **Vértice:** É o ponto mais alto ou mais baixo da parábola. Ele indica o valor máximo ou mínimo da função, dependendo da concavidade.
- **Interceptações com o eixo x :** São os pontos em que o gráfico corta o eixo horizontal. Esses pontos são chamados de **zeros** ou **raízes da função**. Representam os valores de x que fazem $f(x) = 0$.

• **Interceptação com o eixo y :** É o ponto onde o gráfico corta o eixo vertical. Representa o valor de $f(x)$ quando $x = 0$.

VISUALIZAÇÃO

A seguir, dois exemplos de gráficos de parábolas:

Parábola com $a > 0$ (mínimo)

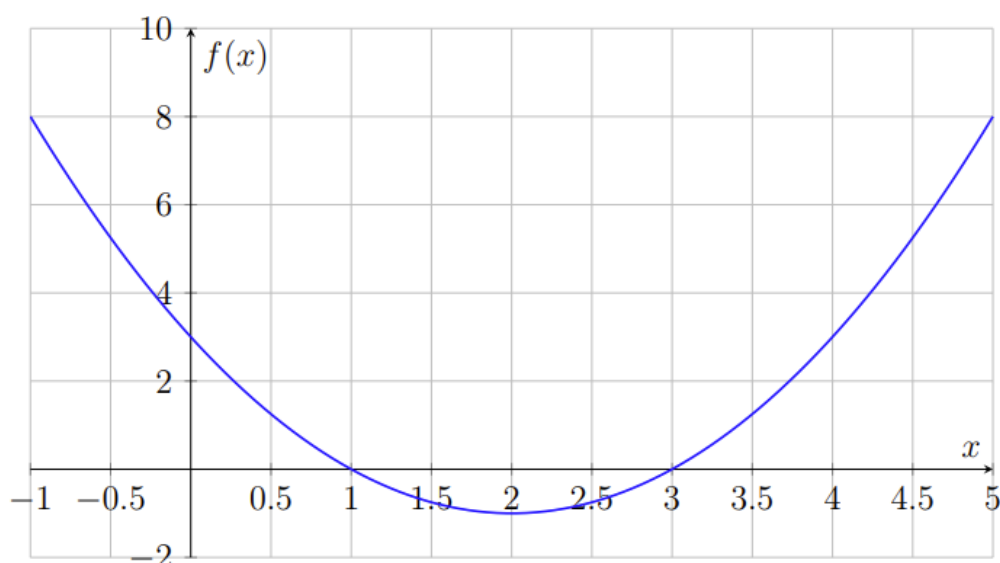


Figura 1: Função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Análise do gráfico: A parábola tem concavidade voltada para cima porque $a > 0$. Ela corta o eixo x nos pontos $x = 1$ e $x = 3$ (raízes da função). O valor mínimo ocorre no vértice, em $x = 2$, e a interseção com o eixo y acontece em $f(0) = 3$.

Parábola com $a < 0$ (máximo)

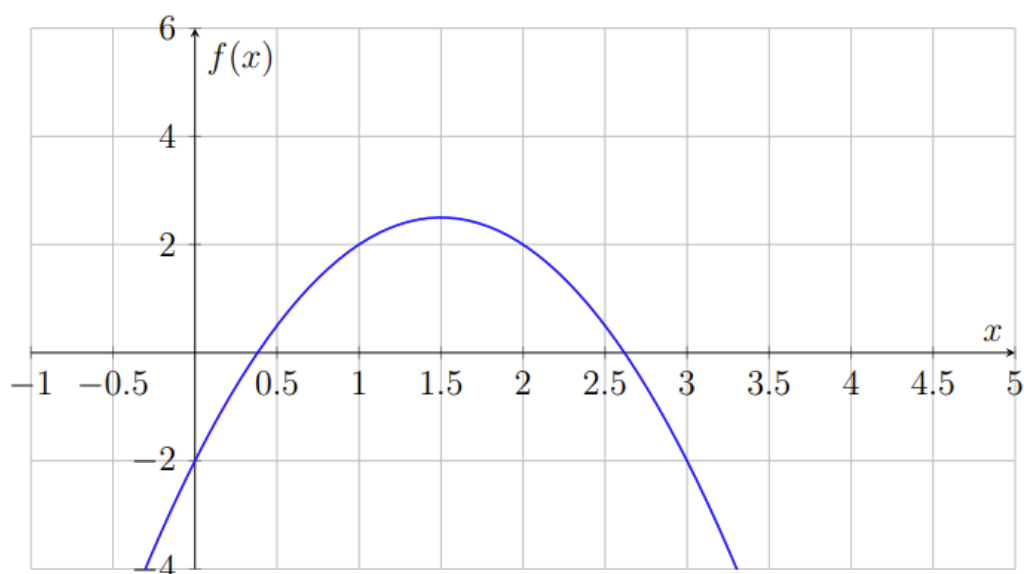


Figura 2: Função $f(x) = -2x^2 + 6x - 2$

Análise do gráfico: A parábola tem concavidade para baixo. As raízes da função são aproximadamente $x \approx 0,38$ e $x \approx 2,62$. O valor máximo da função ocorre no vértice, quando $x = 1,5$, e o gráfico intercepta o eixo y em $f(0) = -2$.

Parábola sem raízes reais ($\Delta < 0$)

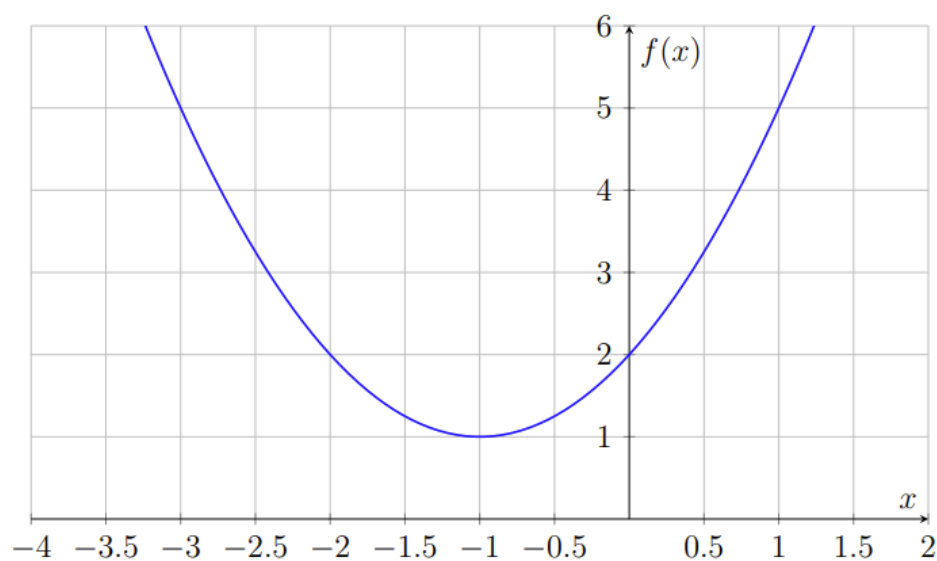


Figura 3: Função $f(x) = x^2 + 2x + 2$ sem raízes reais

Análise do gráfico: A parábola tem concavidade voltada para cima ($a > 0$), mas **não intercepta o eixo x** , pois o discriminante é negativo ($\Delta < 0$). O valor mínimo ocorre no vértice, em $x = -1$, com $f(-1) = 1$. A função intercepta o eixo y no ponto $f(0) = 2$.

EXERCÍCIOS

Exercício 1. Calcule o valor de x ou de $y/f(x)$, conforme indicado em cada item.

1. Seja $f(x) = x^2 + 2x$. Calcule $f(3)$.
2. Seja $f(x) = x^2 - 9$. Sabendo que $f(x) = 7$, determine o valor de x .
3. Dada a função $f(x) = 2x^2 - 4x$, calcule o valor de x quando $f(x) = 0$.
4. Considere a função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Calcule $f(4)$.
5. Sabendo que $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$ e que $f(x) = 0$, encontre os possíveis valores de x .
6. Seja $f(x) = x^2 + \frac{5}{2}$. Sabendo que $f(x) = \frac{9}{2}$, determine o valor de x .
7. Seja $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Sabendo que $f(x) = 4$, determine os valores de x .
8. Seja $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Sabendo que $f(x) = 0$, determine os valores de x .

Exercício 2. Observe os gráficos abaixo e, para cada um deles, responda com base na visualização:

1. O valor do coeficiente a é positivo ou negativo?
2. O ponto do vértice é de mínimo ou máximo? Qual é o ponto do vértice?
3. Quais são os valores aproximados onde a função intercepta o eixo x ?
4. Qual é o valor onde a função intercepta o eixo y ?
5. A função possui ou não raízes reais?

Gráfico A

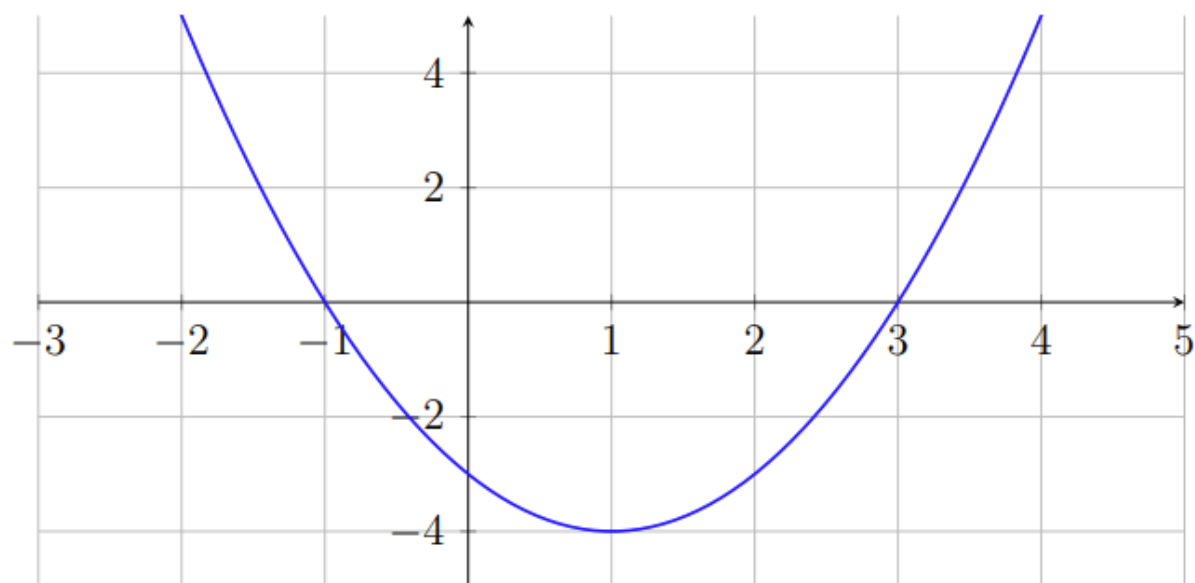


Gráfico B

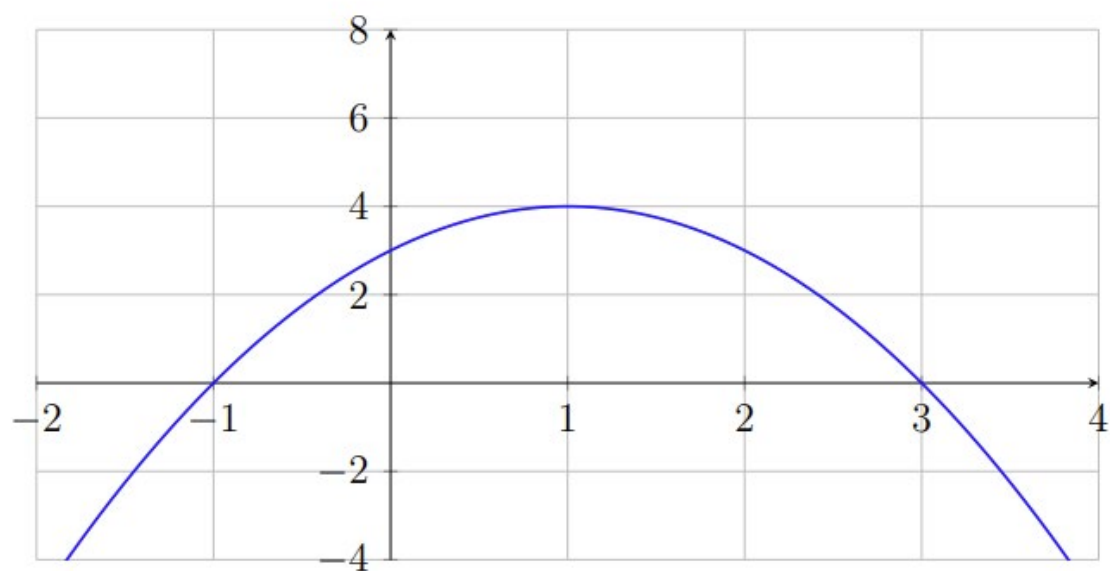
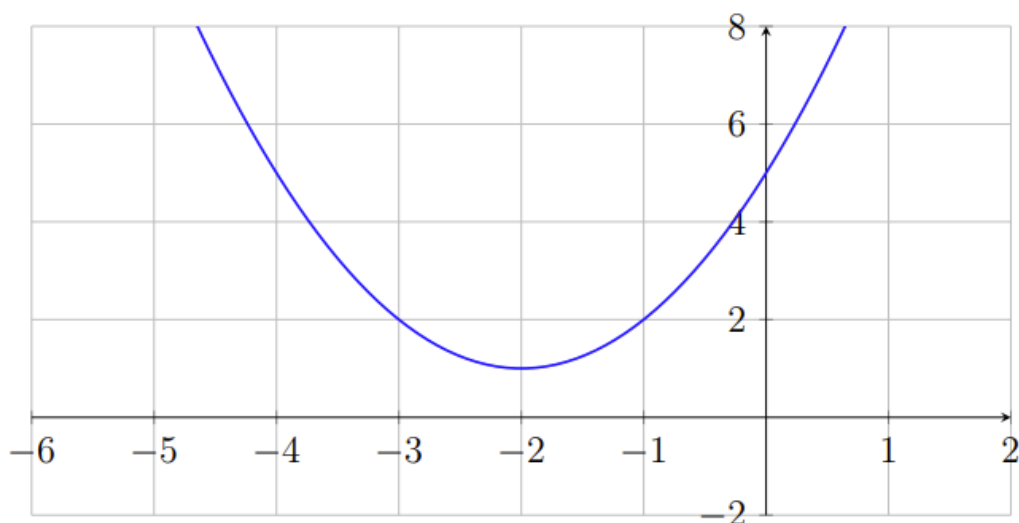


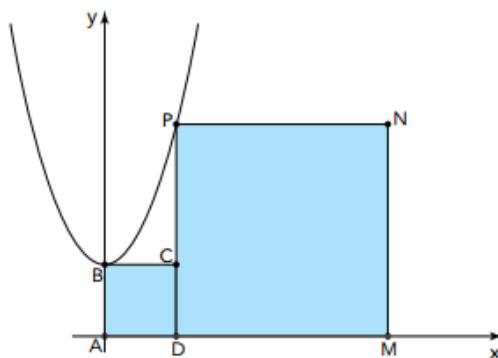
Gráfico C



EXERCÍCIOS DESAFIO

Questão 1 – UERJ 2016

No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + 2$, com $x \in \mathbb{R}$, e os vértices dos quadrados adjacentes ABCD e DMNP.



Observe que os pontos B e P pertencem ao gráfico da função f , e que os pontos A, B, D e M pertencem aos eixos coordenados.

Desse modo, a área do polígono $ABCPNM$, formado pela união dos dois quadrados, é:

- A. 20
- B. 28
- C. 36
- D. 40

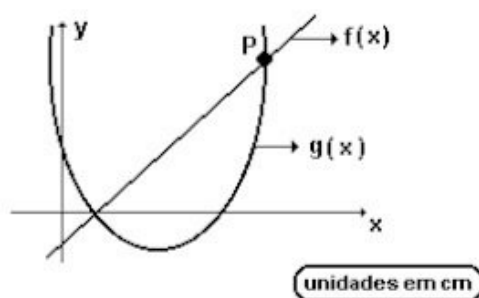
Questão 2 – UFPR 2024

O gráfico da função $f(x) = x^2 + bx + c$ intersecta o eixo x nos pontos $x = -1$ e $x = 3$. Determine o valor de $b + c$.

- A. -5
- B. -4
- C. -1
- D. 2
- E. 5

Questão 3 – UERJ

No sistema de coordenadas cartesianas abaixo, estão representadas as funções $f(x) = 4x - 4$ (reta) e $g(x) = 2x^2 - 12x + 10$ (parábola). As coordenadas do ponto P são:



- A. (6, 20)
- B. (7, 24)
- C. (7, 26)
- D. (6, 26)

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 1.

1. $f(x) = x^2 + 2x$. $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = \boxed{15}$

2. $f(x) = x^2 - 9$, com $f(x) = 7$:

$$x^2 - 9 = 7 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \boxed{\pm 4}$$

3. $f(x) = 2x^2 - 4x$, com $f(x) = 0$:

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = \boxed{0 \text{ ou } 2}$$

4. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, com $x = 4$:

$$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 16 - 4 + 1 = 8 - 4 + 1 = \boxed{5}$$

5. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$, com $f(x) = 0$:

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \boxed{0 \text{ ou } -2}$$

6. $f(x) = x^2 + \frac{5}{2}$, com $f(x) = \frac{9}{2}$:

$$x^2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x = \boxed{\pm\sqrt{2}}$$

7. $f(x) = x^2 - 3x + 2$, com $f(x) = 4$:

$$x^2 - 3x + 2 = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \boxed{x \approx 3.56 \text{ ou } -0.56}$$

8. $f(x) = x^2 + 4x + 5$, com $f(x) = 0$:

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 20 = -4 \Rightarrow \boxed{\text{Sem raízes reais}}$$

Exercício 2.

Gráfico A

- Coeficiente $a > 0$: concavidade para cima.

- Vértice é ponto de **mínimo**. Vértice em $(1, -4)$.
- Intercepta o eixo x em $x = -1$ e $x = 3$.
- Intercepta o eixo y em $y = -3$.
- Possui duas raízes reais.

Gráfico B

- Coeficiente $a < 0$: concavidade para baixo.
- Vértice é ponto de **máximo**. Vértice em $(1, 4)$.
- Intercepta o eixo x em dois pontos (aproximadamente $x = -1$ e $x = 3$).
- Intercepta o eixo y em $y = 3$.
- Possui duas raízes reais.

Gráfico C

- Coeficiente $a > 0$: concavidade para cima.
- Vértice é ponto de **mínimo**. Vértice em $(-2, 1)$.
- A parábola não intercepta o eixo x .
- Intercepta o eixo y em $y = 5$.
- Não possui raízes reais.

RESOLUÇÃO – DESAFIO

Questão 1 – UERJ 2016

A função é $f(x) = x^2 + 2$. O ponto B está no gráfico da função e também no eixo y , ou seja, $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 + 2 = 2$. Logo, o lado do primeiro quadrado (ABCD) é 2. O ponto P também está sobre o gráfico, com abscissa igual ao lado do primeiro quadrado: $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 + 2 = 6$. Então o lado do segundo quadrado (DMNP) é 6.

Área total:

$$A = \text{área do quadrado menor} + \text{área do quadrado maior} = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = \boxed{40}$$

Resposta: **(D)**

Questão 2 – UFPR 2024

A função $f(x) = x^2 + bx + c$ tem raízes $x = -1$ e $x = 3$. Isso significa que:

$$f(-1) = 0 \quad \text{e} \quad f(3) = 0$$

Substituindo em $f(x) = x^2 + bx + c$:

Para $x = -1$:

$$(-1)^2 + (-1)b + c = 0 \Rightarrow 1 - b + c = 0 \Rightarrow -b + c = -1 \quad (1)$$

Para $x = 3$:

$$(3)^2 + 3b + c = 0 \Rightarrow 9 + 3b + c = 0 \Rightarrow 3b + c = -9 \quad (2)$$

Sistema:

$$\begin{cases} -c + b = 1 & (1 \text{ reescrita}) \\ 3b + c = -9 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$b + 3b = 1 - 9 \Rightarrow 4b = -8 \Rightarrow b = -2$$

Substituindo em (1):

$$-b + c = -1 \Rightarrow 2 + c = -1 \Rightarrow c = -3$$

Logo:

$$b + c = -2 + (-3) = \boxed{-5}$$

Resposta: **(A)**

Questão 3 – UERJ

Temos duas funções: - Reta: $f(x) = 4x - 4$ - Parábola: $g(x) = 2x^2 - 12x + 10$

O ponto P é a interseção entre elas $\rightarrow$ resolver o sistema:

Resolvendo:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 7$$

Substituindo $x = 7$ em $f(x)$:

$$f(7) = 4 \cdot 7 - 4 = 28 - 4 = \boxed{24} \Rightarrow P = (7, 24)$$

Resposta: **(B)**

4) FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU (PARTE 2)

INTRODUÇÃO

Neste material, vamos aprofundar nosso estudo sobre as funções do segundo grau, com ênfase na resolução de problemas que envolvem encontrar o **máximo** ou **mínimo**. Esse tipo de situação é muito comum em contextos como lucro máximo, custo mínimo, maior área possível, entre outros.

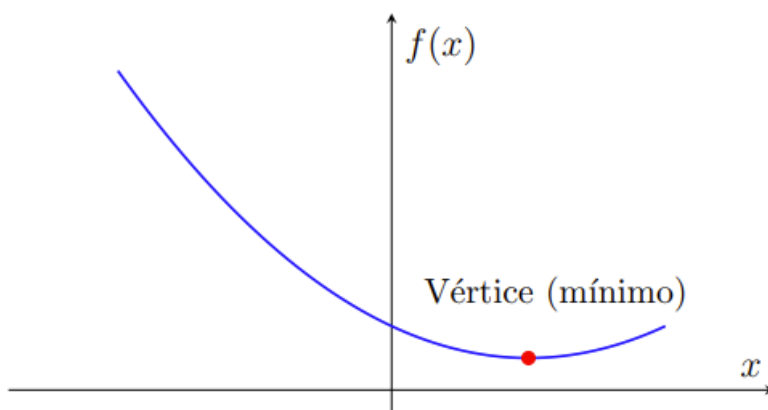
VÉRTICE DA FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

A função do segundo grau é escrita na forma geral:

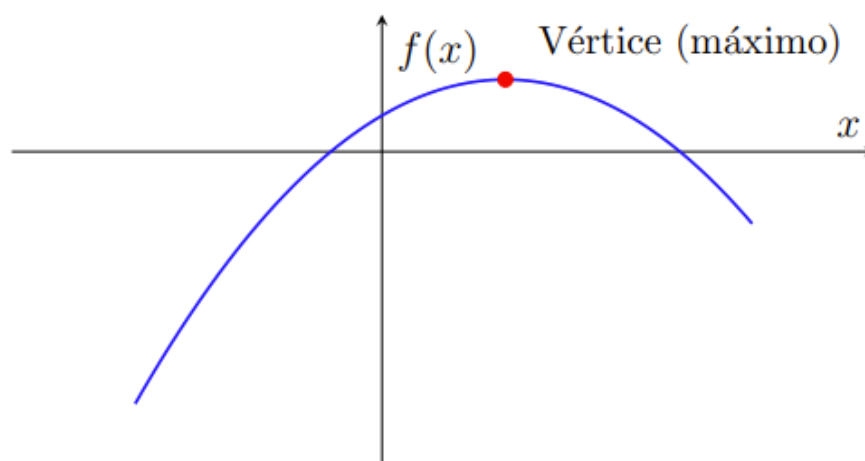
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{com } a \neq 0.$$

O gráfico dessa função é uma **parábola**, e seu ponto mais alto ou mais baixo é chamado de **vértice**.

- Se $a > 0$, a parábola é voltada para cima, e o vértice representa o **valor mínimo** da função:



- Se $a < 0$, a parábola é voltada para baixo, e o vértice representa o **valor máximo** da função:



COORDENADAS DO VÉRTICE

Para encontrar o ponto de máximo ou mínimo, usamos as seguintes fórmulas:

- A abscissa do vértice (valor de x) é:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

- A ordenada do vértice (valor de $f(x)$) pode ser calculada usando o discriminante da equação, conhecido como Δ , definido por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Com isso, temos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Assim, o vértice da parábola é o ponto:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

EXEMPLOS RESOLVIDOS

Exemplo 1: Encontrando o Vértice de uma Função

Dada a função do segundo grau abaixo, determine as coordenadas do **vértice** da parábola e indique se ele é um ponto de máximo ou de mínimo.

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$$

Solução:

Identificamos os coeficientes: $a = 2$, $b = -8$, $c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 64 - 40 = 24$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{24}{4 \cdot 2} = -\frac{24}{8} = -3$$

$$\text{Vértice: } V = (2, -3)$$

Esse vértice é um ponto de mínimo, pois $a > 0$.

Exemplo 2: Problema de Lucro Máximo

De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão $L = R - C$, onde:

$$C(x) = x^2 - 2000x \quad (\text{Custo}), \quad R(x) = 6000x - x^2 \quad (\text{Receita})$$

Determine o número de peças que devem ser produzidas para que o lucro seja máximo.

Solução:

$$L(x) = R(x) - C(x) = (6000x - x^2) - (x^2 - 2000x)$$

$$L(x) = 6000x - x^2 - x^2 + 2000x = 8000x - 2x^2$$

Temos uma função do segundo grau: $L(x) = -2x^2 + 8000x$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-8000}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8000}{-4} = 2000$$

A empresa deve produzir 2000 peças para obter lucro máximo.

Exemplo 3: Área do Retângulo Envolvendo o Arco de um Túnel

A entrada de um túnel tem o formato de um arco de parábola, descrito pela função:

$$y = -x^2 + 9$$

O túnel está acima do eixo x e alinhado simetricamente ao longo do eixo y . Deseja-se construir um retângulo que envolva completamente essa entrada, com base no solo e altura até o ponto mais alto da parábola. Qual é a área do retângulo que envolve completamente a entrada do túnel?

Solução:

Para determinar a área do retângulo, precisamos conhecer:

- A **base**, que corresponde à distância entre os pontos onde a parábola intersecta o eixo x ;
- A **altura**, que corresponde ao valor máximo da parábola (coordenada y do vértice).

1. Encontrando a base: Os pontos de interseção com o eixo x ocorrem quando $y = 0$:

$$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Logo, a base do retângulo é:

$$\text{Base} = 3 - (-3) = 6 \text{ metros.}$$

2. Encontrando a altura: O vértice da parábola ocorre em:

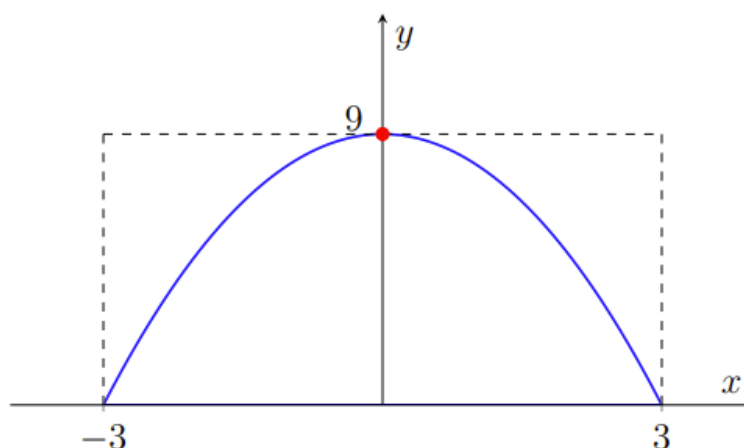
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$$

$$y_v = f(0) = -0^2 + 9 = 9$$

Portanto, a altura do retângulo é 9 metros.

3. Calculando a área:

$$A = \text{Base} \times \text{Altura} = 6 \cdot 9 = \boxed{54 \text{ m}^2}$$



EXERCÍCIOS

1. Dada a função $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$, determine as coordenadas do vértice da parábola e indique se é ponto de máximo ou mínimo.
2. Dada a função $f(x) = x^2 + 4x + 1$, determine as coordenadas do vértice da parábola e indique se é ponto de máximo ou mínimo.

3. Uma empresa fabrica e vende certo produto. O custo de produção é dado por $C(x) = x^2 - 100x$ e a receita obtida pela venda é dada por $R(x) = 500x - x^2$, onde x representa a quantidade produzida e vendida.

Determine quantas unidades devem ser produzidas para que o **lucro seja máximo**.

4. A entrada de um túnel tem formato de arco de parábola dado por $y = -x^2 + 16$. Sabendo que o túnel está acima do eixo x e simétrico em relação ao eixo y , calcule a área do retângulo que envolve completamente a entrada.

5. Um fazendeiro deseja cercar uma área retangular encostada em um rio. Ele dispõe de 80 metros de cerca e não precisará cercar o lado voltado para o rio. Qual deve ser a largura do terreno para que a área seja máxima?

6. Uma colônia de bactérias cresce de acordo com a função:

$$N(t) = -2t^2 + 20t + 100,$$

onde $N(t)$ representa a quantidade de bactérias em milhares e t é o tempo em horas.

Determine o momento em que a população de bactérias é máxima e qual é esse valor máximo.

EXERCÍCIOS DESAFIO

1. (UERJ - 2016)

Observe a função f , definida por:

$$f(x) = x^2 - 2kx + 29, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

Se $f(x) \geq 4$, para todo número real x , o valor mínimo da função f é 4. Assim, o valor positivo do parâmetro k é:

- a. 5
- b. 6

- c. 10
- d. 15

2. (ENEM 2016)

Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões.

Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$$y = 9 - x^2,$$

sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metros quadrados?

- a. 18
- b. 20
- c. 36
- d. 45
- e. 54

3. (ENEM 2013)

Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão

$$L(x) = -x^2 + 12x - 20,$$

onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote.

A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a:

- a. muito baixa
- b. baixa
- c. média
- d. alta
- e. muito alta

4. (ENEM 2015)

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão:

$$T(h) = -h^2 + 22h - 85$$

em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa.

A tabela a seguir associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

- a. 4
- b. 6
- c. 9
- d. 10
- e. 14

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1. **Função:** $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$

Coeficientes: $a = -3$, $b = 12$, $c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-5) = 144 - 60 = 84$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot (-3)} = 2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{84}{4 \cdot (-3)} = \frac{84}{12} = 7$$

Vértice: (2, 7)

Como $a < 0$, é um ponto de máximo.

2. **Função:** $f(x) = x^2 + 4x + 1$

Coeficientes: $a = 1$, $b = 4$, $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{12}{4 \cdot 1} = -3$$

Vértice: (-2, -3)

Como $a > 0$, é um ponto de mínimo.

3. **Lucro máximo:**

Dado:

$$R(x) = 500x - x^2, \quad C(x) = x^2 - 100x$$

$$L(x) = R(x) - C(x) = (500x - x^2) - (x^2 - 100x)$$

$$L(x) = 600x - 2x^2$$

Coeficientes: $a = -2$, $b = 600$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 600^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 360000$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-600}{2 \cdot (-2)} = \frac{-600}{-4} = \boxed{150}$$

A empresa deve produzir 150 unidades para obter o lucro máximo.

4. Área do retângulo em torno do túnel:

Equação: $y = -x^2 + 16$

Raízes:

$$-x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow \text{Base} = 8$$

Coeficientes: $a = -1$, $b = 0$, $c = 16$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 16 = 64$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{64}{4 \cdot (-1)} = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow \text{Altura} = 16$$

$$\text{Área} = 8 \cdot 16 = \boxed{128 \text{ m}^2}$$

5. Área máxima do terreno:

Seja x a **largura** (lado perpendicular ao rio). Então, os dois lados verticais consomem $2x$ metros de cerca. O restante irá para o lado horizontal oposto ao rio, ou seja:

$$\text{Comprimento} = 80 - 2x$$

A área do terreno será dada por:

$$A(x) = x \cdot (80 - 2x) = 80x - 2x^2$$

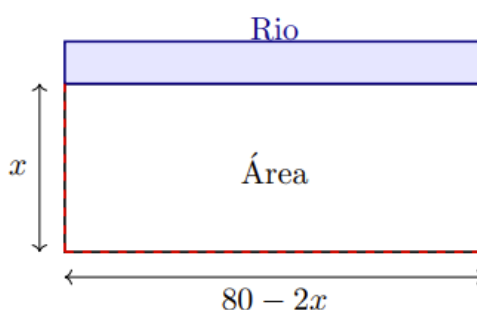
Determinando o valor de x que maximiza a área:

$$a = -2, \quad b = 80$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 80^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 6400$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2 \cdot (-2)} = \frac{-80}{-4} = \boxed{20}$$

Conclusão: A largura deve ser de 20 metros para que a área seja máxima.



A largura deve ser 20 metros para que a área seja máxima.

6. Máximo de bactérias:

$$\text{Função: } N(t) = -2t^2 + 20t + 100$$

$$\text{Coeficientes: } a = -2, \quad b = 20, \quad c = 100$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 400 - 4 \cdot (-2) \cdot 100 = 400 - (-800) = 400 + 800 = 1200$$

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2 \cdot (-2)} = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1200}{4 \cdot (-2)} = \frac{1200}{8} = 150$$

A população é máxima após 5 horas e atinge 150 mil bactérias.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DESAFIO

1. (UERJ - 2016)

A função dada é:

$$f(x) = x^2 - 2kx + 29$$

Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a = 1 > 0$), a parábola é voltada para cima, e o valor mínimo ocorre no vértice.

A abscissa do vértice é dada por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2k)}{2 \cdot 1} = \frac{2k}{2} = k$$

Substituímos $x = k$ na função para obter o valor mínimo:

$$f(k) = (k)^2 - 2k \cdot k + 29 = k^2 - 2k^2 + 29 = -k^2 + 29$$

Segundo o enunciado, o valor mínimo da função é 4:

$$-k^2 + 29 = 4 \Rightarrow -k^2 = 4 - 29 = -25 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow k = \boxed{5}$$

Alternativa correta: A)

2. (ENEM 2016)

A parábola $y = 9 - x^2$ tem vértice em (0,9) e corta o eixo x quando:

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

Então: - Base do retângulo: $3 - (-3) = 6$ - Altura do retângulo: 9 - Área do retângulo: $6 \cdot 9 = 54$ - Área sob a parábola: $\frac{2}{3} \cdot 54 = \boxed{36}$

Alternativa correta: C)

3. (ENEM 2013)

A função é:

$$L(x) = -x^2 + 12x - 20$$

Vértice da parábola:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot (-1)} = 6$$

Quantidade ideal de bonés por pacote:

Alternativa correta: B)

4. (ENEM 2015)

A temperatura no interior da estufa é dada por:

$$T(h) = -h^2 + 22h - 85$$

Como o coeficiente de h^2 é negativo, a parábola é voltada para baixo. Logo, o valor máximo da temperatura ocorre no vértice.

O valor máximo da função quadrática é dado por:

$$T_v = \frac{-\Delta}{4a}, \quad \text{com } \Delta = b^2 - 4ac$$

Calculamos o discriminante:

$$\Delta = 22^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-85) = 484 - 340 = 144$$

Logo:

$$T_v = \frac{-144}{4 \cdot (-1)} = \frac{-144}{-4} = 36$$

Consultando a tabela de classificação da temperatura:

$$30 \leq T \leq 43 \Rightarrow \text{Classificação: Alta}$$

Resposta correta: D)

5) PROGRESSÕES

INTRODUÇÃO

As progressões são sequências de números que seguem uma regra específica de formação. Elas são amplamente utilizadas em matemática e em diversas áreas do conhecimento, como finanças, física e ciência da computação. Existem diferentes tipos de progressões, entre as mais comuns estão as **Progressões Aritmética (PA)**, **Progressões Geométrica (PG)** e **Progressões Recorrente (PR)**.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Uma **Progressão Aritmética (PA)** é uma sequência de números em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante. Essa diferença é chamada de **razão** da PA. A fórmula geral para calcular o n-ésimo termo de uma PA é dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Onde:

- a_n é o n-ésimo termo da progressão;
- a_1 é o primeiro termo da progressão;
- n é a posição do termo desejado;
- r é a razão da progressão.
-

A fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Onde:

- S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Uma **Progressão Geométrica (PG)** é uma sequência de números em que a razão entre dois termos consecutivos é constante. Essa razão é chamada de **razão** da PG, e a sequência

é formada pela multiplicação sucessiva dessa razão. A fórmula para calcular o n -ésimo termo de uma PG é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

Onde:

- a_n é o n -ésimo termo da progressão;
- a_1 é o primeiro termo da progressão;
- n é a posição do termo desejado;
- r é a razão da progressão.

A fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PG (quando $r \neq 1$) é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

E a fórmula para a soma de uma PG infinita (quando $|r| < 1$) é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Onde:

- S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão;
- S_∞ é a soma infinita da progressão.

PROGRESSÃO RECORRENTE (PR)

Uma **Progressão Recorrente (PR)** é uma sequência em que cada termo depende de um ou mais termos anteriores. A relação entre os termos é dada por uma fórmula recursiva. Um exemplo clássico de progressão recorrente é a *sequência de Fibonacci*, onde cada termo é a soma dos dois termos anteriores:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

A sequência é formada pela soma dos dois termos anteriores. O cálculo de termos em progressões recorrentes pode ser mais complexo, pois depende de uma regra de recorrência definida para cada caso específico.

Exemplo de Progressão Aritmética (PA)

Considere a sequência: 5,8,11,14,17, Vamos responder às seguintes perguntas:

- Qual é o 11º termo da sequência?
- Qual é a soma dos 90 primeiros termos dessa sequência?

Passo 1: Calcular a razão da PA

A razão (r) é a diferença entre dois termos consecutivos da sequência. Para calcular a razão, basta subtrair o primeiro termo do segundo:

$$r = 8 - 5 = 3$$

Logo, a razão da PA é $r = 3$.

Como a razão $r = 3$ é positiva, a sequência é **crescente**. Isso significa que, a cada novo termo, o valor aumenta em 3 unidades. Se a razão fosse negativa a sequência seria **decrecente**.

Passo 2: Calcular o 11º termo da sequência

Agora que sabemos a razão, podemos calcular o 11º termo (a_{11}) utilizando a fórmula do n-ésimo termo:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Substituindo $a_1 = 5$, $r = 3$ e $n = 11$:

$$a_{11} = 5 + (11 - 1) \cdot 3 = 5 + 10 \cdot 3 = 5 + 30 = 35$$

Portanto, o 11º termo da sequência é $a_{11} = 35$.

Passo 3: Calcular a soma dos 90 primeiros termos da sequência

Agora, vamos calcular a soma dos 90 primeiros termos utilizando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Substituindo $n = 90$, $a_1 = 5$ e $a_{90} = 5 + (90 - 1) \cdot 3 = 5 + 89 \cdot 3 = 5 + 267 = 272$:

$$S_{90} = \frac{90}{2} \cdot (5 + 272) = 45 \cdot 277 = 12465$$

Portanto, a soma dos 90 primeiros termos da sequência é $S_{90} = 12465$.

Exemplo de Progressão Geométrica (PG)

Considere a sequência: $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$. Vamos responder às seguintes perguntas:

- Qual é o 6º termo da sequência?
- Qual é a soma dos 5 primeiros termos dessa sequência?
- Qual é a soma infinita dessa sequência?

Passo 1: Calcular a razão da PG

A razão (r) é a razão entre dois termos consecutivos da sequência. Para calcular a razão, basta dividir um termo pelo seu antecessor:

$$r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Logo, a razão da PG é $r = \frac{1}{2}$.

Como a razão $r = \frac{1}{2}$ é menor que 1, a sequência é **decrecente**. Isso significa que, a cada novo termo, o valor será a metade do termo anterior, fazendo a sequência diminuir progressivamente. Em uma progressão geométrica, se a razão estiver entre 0 e 1, a sequência diminui, aproximando-se de zero, mas sem jamais alcançá-lo. Se a razão for maior que 1, a sequência será **crescente** e aumentará progressivamente.

Passo 2: Calcular o 6º termo da sequência

Agora que sabemos a razão, podemos calcular o 6º termo (a_6) utilizando a fórmula do n -ésimo termo de uma PG:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

Substituindo $a_1 = 8$, $r = \frac{1}{2}$ e $n = 6$:

$$a_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 8 \cdot \frac{1}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Portanto, o 6º termo da sequência é $a_6 = \frac{1}{4}$.

Passo 3: Calcular a soma dos 5 primeiros termos da sequência

Agora, vamos calcular a soma dos 5 primeiros termos utilizando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG (quando $r \neq 1$):

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Substituindo $a_1 = 8$, $r = \frac{1}{2}$ e $n = 5$:

$$S_5 = 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \cdot \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = 8 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right)$$

Agora, calculemos:

$$S_5 = 8 \cdot 2 \cdot \left(\frac{31}{32}\right) = 16 \cdot \frac{31}{32} = \frac{496}{32} = 15.5$$

Portanto, a soma dos 5 primeiros termos da sequência é $S_5 = 15.5$.

Passo 4: Calcular a soma infinita da sequência

Para calcular a soma infinita de uma PG, a fórmula é válida apenas quando a razão r está no intervalo $(-1,1)$. Como a razão $r = \frac{1}{2}$ está dentro desse intervalo, podemos calcular a soma infinita utilizando a fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Substituindo $a_1 = 8$ e $r = \frac{1}{2}$:

$$S_\infty = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 8 \cdot 2 = 16$$

Portanto, a soma infinita da sequência é $S_{\infty} = 16$.

Exemplo de Progressão Recorrente (PR)

Considere a sequência definida pela relação recursiva:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 1$$

Vamos responder às seguintes perguntas:

- Qual é o 6º termo da sequência?
- Qual é a soma dos 6 primeiros termos dessa sequência?

Passo 1: Calcular o 6º termo da sequência

A sequência é dada pela fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 1$$

Agora, vamos calcular os primeiros 6 termos da sequência:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 1 \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2, & a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5, & a_6 &= a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

Portanto, o 6º termo da sequência é $a_6 = 8$.

Passo 2: Calcular a soma dos 6 primeiros termos da sequência

Agora, vamos calcular a soma dos 6 primeiros termos da sequência. Os primeiros 6 termos são:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$$

A soma dos 6 primeiros termos é:

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$

Portanto, a soma dos 6 primeiros termos da sequência é $S_6 = 20$.

EXERCÍCIOS

1. Considere a sequência $12, \frac{9}{2}, 3, \frac{3}{2}, \dots$. Responda às seguintes perguntas:
 - Qual é o 5º termo dessa sequência?
 - Qual é a soma dos 6 primeiros termos dessa sequência?
2. Considere a sequência $3, 7, 11, 15, 19, \dots$. Responda às seguintes perguntas:
 - Qual é o 8º termo dessa sequência?
 - Qual é a soma dos 12 primeiros termos dessa sequência?
3. Considere a sequência $2, 6, 18, 54, 162, \dots$. Responda às seguintes perguntas:
 - Qual é o 6º termo dessa sequência?
 - Qual é a soma dos 7 primeiros termos dessa sequência?
 - Qual é a soma infinita dessa sequência?
4. Considere a sequência $8, \frac{6}{1}, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \frac{81}{32}, \dots$. Responda às seguintes perguntas:
 - Qual é o 6º termo dessa sequência?
 - Qual é a soma dos 5 primeiros termos dessa sequência?
 - Qual é a soma infinita dessa sequência?

5. Considere a sequência definida pela relação recursiva:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 2$$

Responda às seguintes perguntas:

- Qual é o 6º termo dessa sequência?
- Qual é a soma dos 5 primeiros termos dessa sequência?

EXERCÍCIOS DESAFIO

1. **(UERJ 2016)** Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia - corrida de 6 km;
- dias subsequentes - acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km. Qual é o total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros?

- a. 414
- b. 438
- c. 456
- d. 484

2. **(ENEM 2013)** As projeções para a produção de arroz no período de 2012 a 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro abaixo apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

- a. 497,25
- b. 500,85
- c. 502,87
- d. 558,75
- e. 563,25

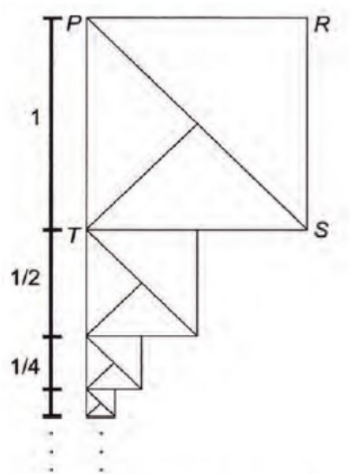
3. **(UERJ 2022)** Considere a seguinte equação:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \dots = 18, x \in \mathbb{R}$$

Sabendo que o primeiro membro dessa equação é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, o valor de x é igual a:

- a. 6
- b. 8
- c. 10
- d. 12

4. **(ENEM 2020)** O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado $PRST$, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

- a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$

d. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$

e. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1. Considere a sequência $12, \frac{9}{2}, 3, \frac{3}{2}, \dots$. Responda às seguintes perguntas:

○ Qual é o 5º termo dessa sequência?

A sequência é uma Progressão Aritmética (PA) com o primeiro termo $a_1 = 12$ e razão $r = -\frac{3}{2}$. Usando a fórmula do n-ésimo termo de uma PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Substituindo $a_1 = 12$, $r = -\frac{3}{2}$, e $n = 5$:

$$a_5 = 12 + (5 - 1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 12 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 12 - 6 = 6$$

Portanto, o 5º termo é $a_5 = 6$.

○ Qual é a soma dos 6 primeiros termos dessa sequência?

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Sabemos que $a_1 = 12$, $n = 6$, e $a_6 = 12 + (6 - 1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 12 + 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 12 - 7.5 = 4.5$.

4.5. Substituindo esses valores na fórmula:

$$S_6 = \frac{6}{2} \cdot (12 + 4.5) = 3 \cdot 16.5 = 49.5$$

Portanto, a soma dos 6 primeiros termos é $S_6 = 49.5$.

2. Considere a sequência $3, 7, 11, 15, 19, \dots$. Responda às seguintes perguntas:

○ Qual é o 8º termo dessa sequência?

A sequência é uma Progressão Aritmética (PA) com o primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $r = 4$. Usando a fórmula do n-ésimo termo de uma PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Substituindo $a_1 = 3$, $r = 4$, e $n = 8$:

$$a_8 = 3 + (8 - 1) \cdot 4 = 3 + 7 \cdot 4 = 3 + 28 = 31$$

Portanto, o 8º termo é $a_8 = 31$.

○ Qual é a soma dos 12 primeiros termos dessa sequência?

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Sabemos que $a_1 = 3$, $n = 12$, e $a_{12} = 3 + (12 - 1) \cdot 4 = 3 + 11 \cdot 4 = 3 + 44 = 47$.

Substituindo esses valores na fórmula:

$$S_{12} = \frac{12}{2} \cdot (3 + 47) = 6 \cdot 50 = 300$$

Portanto, a soma dos 12 primeiros termos é $S_{12} = 300$.

3. Considere a sequência 2, 6, 18, 54, 162, Responda às seguintes perguntas:

○ Qual é o 6º termo dessa sequência?

A sequência é uma Progressão Geométrica (PG) com o primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $r = 3$. Usando a fórmula do n -ésimo termo de uma PG:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Substituindo $a_1 = 2$, $r = 3$, e $n = 6$:

$$a_6 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$$

Portanto, o 6º termo é $a_6 = 486$.

○ Qual é a soma dos 7 primeiros termos dessa sequência?

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (\text{para } r \neq 1)$$

Sabemos que $a_1 = 2$, $r = 3$, e $n = 7$:

$$S_7 = 2 \cdot \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 2187}{-2} = 2 \cdot \frac{-2186}{-2} = 2186$$

Portanto, a soma dos 7 primeiros termos é $S_7 = 2186$.

○ Qual é a soma infinita dessa sequência?

A soma infinita de uma PG só existe quando a razão r está entre -1 e 1.

Como $r = 3$ é maior que 1, a soma infinita **não existe** para essa sequência.

4. Considere a sequência $8, \frac{6}{1}, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \frac{81}{32}, \dots$. Responda às seguintes perguntas:

○ Qual é o 6º termo dessa sequência?

A sequência é uma Progressão Geométrica (PG) com o primeiro termo $a_1 = 8$ e razão $r = \frac{3}{4}$. Usando a fórmula do n-ésimo termo de uma PG:

$$a_6 = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 8 \cdot \frac{3^5}{4^5} = 8 \cdot \frac{243}{1024} = \frac{1944}{1024} = \frac{486}{256}$$

Portanto, o 6º termo é $a_6 = \frac{486}{256}$.

○ Qual é a soma dos 5 primeiros termos dessa sequência?

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Sabemos que $a_1 = 8$, $r = \frac{3}{4}$, e $n = 5$:

$$S_5 = 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5}{1 - \frac{3}{4}} = 8 \cdot \frac{1 - \frac{243}{1024}}{\frac{1}{4}} = 8 \cdot 4 \cdot \left(1 - \frac{243}{1024}\right)$$

Calculando $1 - \frac{243}{1024} = \frac{781}{1024}$, então:

$$S_5 = 32 \cdot \frac{781}{1024} = \frac{25072}{1024} \approx 24.5$$

Portanto, a soma dos 5 primeiros termos é $S_5 \approx 24.5$.

○ Qual é a soma infinita dessa sequência?

Como a razão $r = \frac{3}{4}$ está entre -1 e 1, podemos calcular a soma infinita usando a fórmula:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r}$$

Substituindo $a_1 = 8$ e $r = \frac{3}{4}$:

$$S_{\infty} = \frac{8}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 8 \cdot 4 = 32$$

Portanto, a soma infinita da sequência é $S_{\infty} = 32$.

5. Considere a sequência definida pela relação recursiva:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 2$$

Responda às seguintes perguntas:

○ Qual é o 6º termo dessa sequência?

Usando a relação de recorrência, temos:

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 2 + 2 \cdot 1 = 4, \quad a_4 = a_3 + 2a_2 = 4 + 2 \cdot 2 = 8$$

$$a_5 = a_4 + 2a_3 = 8 + 2 \cdot 4 = 16, \quad a_6 = a_5 + 2a_4 = 16 + 2 \cdot 8 = 32$$

Portanto, o 6º termo é $a_6 = 32$.

○ Qual é a soma dos 5 primeiros termos dessa sequência?

A soma dos 5 primeiros termos é:

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Portanto, a soma dos 5 primeiros termos é $S_5 = 31$.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DESAFIO

1. (UERJ 2016)

Trata-se de uma progressão aritmética (PA), com:

$$a_1 = 6, \quad r = 2, \quad a_n = 42$$

Usando a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 42 = 6 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow 42 = 2n + 4 \Rightarrow n = 19$$

Usando a fórmula da soma dos termos:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{19}{2}(6 + 42) = \frac{19 \cdot 48}{2} = 456$$

Resposta correta: C

2. (ENEM 2013)

A tabela mostra uma progressão aritmética com:

$$a_1 = 50,25, \quad r = 51,50 - 50,25 = 1,25, \quad n = 10 \text{ (anos de 2012 a 2021)}$$

Utilizamos a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n - 1)r)$$

Substituindo os valores:

$$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot (2 \cdot 50,25 + 9 \cdot 1,25) = 5 \cdot (100,5 + 11,25) = 5 \cdot 111,75 = 558,75$$

Resposta correta: D

3. (UERJ 2022)

O primeiro membro da equação é:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \dots$$

Isso é uma progressão geométrica infinita com:

$$a_1 = x, \quad q = \frac{1}{3}, \quad S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{3x}{2}$$

Pela equação:

$$\frac{3x}{2} = 18 \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 2}{3} = 12$$

Resposta correta: D

4. (ENEM 2020)

O lado do quadrado inicial é:

$$a_1 = 1, \quad \text{e a razão da PG é } \frac{1}{2}$$

A medida do lado do quadrado n -ésimo é:

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Para o centésimo quadrado:

$$a_{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$$

Resposta correta: B

CONCLUSÃO

Apesar de suas diferenças, como a adição constante na Progressão Aritmética (PA) e a multiplicação constante na Progressão Geométrica (PG), ambas as sequências possuem elementos em comum que facilitam seu estudo e aplicação.

Tanto na PA quanto na PG, existem fórmulas específicas para determinar o n -ésimo termo da sequência, o que permite identificar qualquer termo a partir da posição desejada. Além disso, ambas apresentam fórmulas para o cálculo da soma dos termos, o que é especialmente útil em situações práticas.

Essas progressões também são amplamente utilizadas na resolução de problemas contextualizados, como, por exemplo: crescimento populacional, cálculo de juros compostos, parcelamento de prestações, análises econômicas, entre outros. Dessa forma, o estudo das PA e PG vai muito além da teoria, oferecendo ferramentas valiosas para compreender e resolver questões do cotidiano.

A PA e a PG são duas formas organizadas de sequência que, apesar de diferentes em suas regras de formação, estão conectadas pela ideia central de padrão numérico e repetição sistemática. Entender como elas funcionam e quando aplicá-las é um diferencial importante para quem está se preparando para o vestibular, já que essas progressões aparecem tanto em questões diretas quanto em problemas mais elaborados, exigindo interpretação, cálculo e estratégia.

6. ANÁLISE COMBINATÓRIA

INTRODUÇÃO

Análise Combinatória ajuda a contar ou calcular o número de formas possíveis de dispor ou escolher elementos, respeitando certas condições. Os principais conceitos que utilizamos na análise combinatória são: **fatorial**, **permutação**, **arranjo** e **combinação**.

CÁLCULO FATORIAL

O **fatorial** de um número n , representado por $n!$, é o produto de todos os números inteiros de 1 até n . O fatorial é uma operação fundamental na análise combinatória, pois aparece nas fórmulas de permutação, arranjo e combinação.

Fórmula do fatorial

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

Exemplo de cálculo de fatorial

Vamos calcular o fatorial de 6!:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

Descrição

O Princípio da Multiplicação, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem, é utilizado quando temos uma sequência de eventos independentes, e cada evento tem um número fixo de opções. Nesse caso, o número total de maneiras de realizar todos os eventos é o produto do número de opções disponíveis para cada evento.

Exemplos de Aplicação

- Contar formas distintas de realizar uma sequência de eventos independentes
- Contar formas distintas de selecionar itens de diferentes categorias

Exercício de Princípio da Multiplicação

Problema: Um estudante tem a opção de escolher entre 2 tipos de provas, 3 tipos de livros para estudar e 4 tipos de exercícios para praticar. Quantas formas diferentes ele pode organizar sua preparação para o exame?

Solução: Esse problema pode ser resolvido usando o **Princípio da Multiplicação**, pois as escolhas são independentes entre si. O número total de formas de organizar a preparação é dado pelo produto das opções:

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

Portanto, existem **24 formas diferentes** de organizar a preparação do estudante para o exame.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

A **permutação simples** refere-se à organização dos elementos de um conjunto, onde a **ordem importa** e não há repetição de elementos.

A fórmula para calcular a permutação de n elementos é dada por:

$$P(n) = n!$$

Exemplos de Aplicação

- Organizar n objetos ou pessoas em uma fila.
- Embaralhar as letras de uma palavra para formar novas palavras, como no caso de anagramas, quando não há repetição de letras.

Exercício de Permutação

Problema: Você tem 5 livros diferentes e deseja organizá-los em uma estante. Quantas formas diferentes você pode organizar esses livros?

1. Resolução com a Fórmula

Para calcular o número de formas de organizar os livros, utilizamos a fórmula da permutação:

$$P(n) = n!$$

Onde n é o número total de livros (5 livros). Então, temos:

$$P(5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Logo, existem **120 maneiras diferentes** de organizar os 5 livros na estante.

2. Resolução Raciocinando Passo a Passo

Primeiro livro: Temos 5 livros disponíveis para colocar na estante, então há 5 opções para o primeiro livro.

Segundo livro: Depois de colocar o primeiro livro, restam 4 livros, então temos 4 opções para o segundo livro.

Terceiro livro: Agora, restam 3 livros, portanto, 3 opções para o terceiro livro.

Quarto livro: Com 2 livros restantes, há 2 opções para o quarto livro.

Quinto livro: Finalmente, restando apenas 1 livro, há 1 opção para o quinto livro.

Assim, o número total de formas de organizar os 5 livros é dado pelo produto das opções em cada etapa:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Portanto, o número de formas de organizar os 5 livros é **120**, que é exatamente o que obtemos com a fórmula $5!$.

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

A **permutação com repetição** refere-se à organização dos elementos de um conjunto, onde a **ordem importa** e há **repetição de elementos**.

A fórmula para calcular a permutação com repetição é:

$$P(n; p_1, p_2, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \times p_2! \times \dots \times p_k!}$$

Onde: - n é o número total de elementos, - $p_1, p_2, \dots, p_k$ são as quantidades de elementos repetidos.

Exemplos de Aplicação

- Organizar uma palavra com letras repetidas.
- Organizar uma sequência de números com repetição.

Exercício de Permutação com Repetição

Problema: Quantos anagramas podemos formar com a palavra "BANANA"?

Solução: A palavra "BANANA" tem 6 letras no total, a letra "A" se repete 3 vezes, e a letra "N" se repete 2 vezes. Para calcular o número de permutações, usamos a fórmula:

$$P(6; 3, 2) = \frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 60$$

Logo, existem **60** maneiras diferentes de organizar as letras da palavra "BANANA".

ARRANJO

O **arranjo** é uma seleção de k elementos de um conjunto de n elementos, onde a **ordem dos elementos importa**. Ao contrário da permutação, o arranjo considera uma quantidade menor de elementos do conjunto total.

A fórmula do arranjo é dada por:

$$A(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Exemplos de Aplicação

- Escolher e ordenar k pessoas ou elementos, sendo que a ordem da seleção implica diferentes prêmios ou posições.
- Formar senhas usando algarismos distintos.

Exercício de Arranjo

Problema: Uma empresa precisa selecionar 3 líderes de projeto entre 10 candidatos para um novo projeto. Quantas maneiras diferentes a empresa pode selecionar esses 3 líderes, levando em consideração a posição e a responsabilidade de cada um?

Solução: Esse é um problema de **arranjo**, pois estamos escolhendo e organizando 3 candidatos entre 10 disponíveis. O número de arranjos é dado por:

$$A(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!}$$

Agora, vamos calcular esse arranjo. Substituindo na fórmula:

$$A(10,3) = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!}$$

Podemos simplificar a expressão cancelando 7! no numerador e denominador:

$$A(10,3) = 10 \times 9 \times 8$$

Agora, vamos fazer a multiplicação:

$$10 \times 9 = 90$$

$$90 \times 8 = 720$$

Portanto, o número de maneiras diferentes de selecionar e organizar 3 líderes de projeto entre 10 candidatos é **720**.

COMBINAÇÃO

A **combinação** é uma seleção de k elementos de um conjunto de n elementos, onde a **ordem dos elementos não importa**. Ao contrário da permutação e do arranjo, em combinação, diferentes ordens de seleção não são consideradas como escolhas distintas.

A fórmula para calcular a combinação é dada por:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Exemplos de Aplicação

- Selecionar/Escolher k pessoas para formar uma equipe.
- Selecionar/Escolher k números para jogar na loteria.

Exercício de Combinação

Problema: Uma escola tem 12 alunos em uma turma e deseja formar um grupo de 4 alunos para participar de uma pesquisa. Quantos grupos diferentes de 4 alunos podem ser formados?

Solução: Esse é um problema de **combinação**, pois estamos escolhendo 4 alunos entre 12, sem nos preocuparmos com a ordem. O número de combinações é dado por:

$$C(12, 4) = \frac{12!}{4! (12 - 4)!}$$

No entanto, podemos simplificar o cálculo usando o "macete" para evitar o uso de fatoriais completos.

Para o caso de $n = 12$ e $k = 4$, temos:

$$C(12, 4) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4!}$$

Esse "macete" funciona da seguinte forma:

• **Numerador:** No numerador, colocamos os primeiros 4 fatores do fatorial de 12! (ou seja, $12 \times 11 \times 10 \times 9$) porque estamos selecionando 4 elementos ($k = 4$).

• **Denominador:** No denominador, mantemos o 4!, que é o fatorial de $k = 4$.

Portanto, o número de maneiras de escolher 4 alunos entre 12 é **495**.

EXERCÍCIOS

1. Em uma loja, há 5 modelos de tênis, 3 cores de meias e 4 tipos de camisetas. Quantas opções diferentes de conjunto (tênis, meias e camiseta) um cliente pode escolher?
2. Um aluno pode escolher 3 tipos de programas de estudo diferentes (Matemática, Física, Química), 2 tipos de materiais (Livros, Vídeos), e 4 tipos de exercícios (Fáceis, Médios, Difíceis, Extremamente Difíceis). Quantas combinações diferentes ele pode formar para sua rotina de estudo?
3. Quantas maneiras diferentes podemos organizar 5 pessoas em uma fila para tirar uma foto?
4. Quantas diferentes palavras podem ser formadas com as letras da palavra "EXEMPLO"?
5. Um site de compras permite criar uma senha de 4 dígitos, utilizando números de 0 a 9. Quantas senhas diferentes podem ser criadas?
6. Em uma competição, 8 participantes vão disputar entre si. Quantas formas diferentes podemos organizar os 3 primeiros lugares (1º, 2º e 3º) dessa competição?
7. Uma empresa tem 15 funcionários e precisa selecionar 4 para formar uma equipe. Quantas formas diferentes a empresa pode fazer essa seleção?
8. Em um torneio de xadrez, 10 jogadores estão disponíveis para formar uma dupla. Quantas duplas podem ser formadas?

EXERCÍCIOS DESAFIO

1. **(UERJ - RJ - 2015)** Uma criança ganhou seis picolés de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate, representados, respectivamente, pelas letras B, M e C. De segunda a sábado, a criança consome um único picolé por dia, formando uma sequência de

consumo dos sabores. Observe estas sequências, que correspondem a diferentes modos de consumo:

(B, B, M, C, M, C) ou (B, M, M, C, B, C) ou (C, M, M, B, B, C)

O número total de modos distintos de consumir os picolés equivale a:

- a. 6
- b. 90
- c. 180
- d. 720

2. **(UERJ - 2016)** Com o objetivo de melhorar o tráfego de veículos, a prefeitura de uma grande cidade propôs a construção de quatro terminais de ônibus. Para estabelecer conexão entre os terminais, foram estipuladas as seguintes quantidades de linhas de ônibus:

- do terminal A para o B, 4 linhas distintas;
- do terminal B para o C, 3 linhas distintas;
- do terminal A para o D, 5 linhas distintas;
- do terminal D para o C, 2 linhas distintas.

Não há linhas diretas entre os terminais A e C.

Supondo que um passageiro utilize exatamente duas linhas de ônibus para ir do terminal A para o terminal C, calcule a quantidade possível de trajetos distintos que ele poderá fazer.

3. **(ENEM 2021)** Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão:

- a. $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$
- b. $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$
- c. $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

d. $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$

e. $\frac{21!}{7!14!}$

4. **(ENEM 2018)** O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante. Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

a. A_{10}^4

b. C_{10}^4

c. $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$

d. $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$

e. $C_4^2 \times C_6^2$

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

Esse problema é resolvido utilizando o **Princípio da Multiplicação**, pois as escolhas são independentes entre si. O número total de combinações é dado pelo produto das opções para cada item:

$$5 \times 3 \times 4 = 60$$

Resposta: O cliente pode escolher 60 conjuntos diferentes.

1. Este também é um problema do **Princípio da Multiplicação**. O número total de combinações é o produto das opções para cada tipo de escolha:

$$3 \times 2 \times 4 = 24$$

Resposta: O aluno pode formar 24 combinações diferentes para sua rotina de estudo.

2. Esse é um exemplo de **permutação simples**, pois estamos organizando 5 pessoas distintas em uma sequência. O número total de formas de organizar essas 5 pessoas é dado por 5!:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Resposta: Existem 120 maneiras diferentes de organizar as 5 pessoas na fila.

3. A palavra "EXEMPLO" tem 7 letras no total, e a letra "E" se repete 2 vezes, portanto é um caso de **permutação com repetição**. O número total de permutações é dado por:

$$P(7; 2) = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 2520$$

Resposta: É possível formar **2520** palavras diferentes com as letras da palavra "EXEMPLO".

4. Este é um caso de **arranjo**, pois estamos selecionando 4 dígitos de 10 opções (de 0 a 9), e a ordem dos dígitos importa. O número total de formas de criar a senha é dado pela fórmula do arranjo:

$$A(10, 4) = \frac{10!}{(10 - 4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Resposta: Existem 5040 senhas diferentes que podem ser criadas.

5. Esse é um problema de **arranjo**, pois estamos selecionando e organizando 3 participantes de 8, e a ordem importa (1° , 2° , 3°). O número de arranjos é dado por:

$$A(8,3) = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Resposta: Existem 336 formas diferentes de organizar os 3 primeiros lugares.

6. Este é um problema de **combinação**, pois estamos selecionando 4 funcionários de 15, e a ordem não importa. O número de combinações é dado por:

$$C(15,4) = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1365$$

Resposta: A empresa pode selecionar os 4 funcionários de 1365 maneiras diferentes.

7. Esse é um problema de **combinação**, pois estamos escolhendo 2 jogadores de 10, e a ordem não importa. O número de combinações é dado por:

$$C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

Resposta: Podem ser formadas 45 duplas diferentes.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DESAFIO

1. (UERJ - RJ - 2015)

A sequência tem 6 picolés: 2 de cada sabor (B, M, C). Logo, é uma permutação com elementos repetidos:

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{720}{8} = 90$$

Resposta: b

2. (UERJ - 2016)

Os caminhos possíveis de A até C com duas linhas são:

a. $A \rightarrow B \rightarrow C: 4 \cdot 3 = 12$ caminhos

b. $A \rightarrow D \rightarrow C: 5 \cdot 2 = 10$ caminhos

$$12 + 10 = 22 \text{ trajetos distintos}$$

Resposta: 22

3. (ENEM 2021)

Escolhemos 2 tecidos diferentes entre 6 disponíveis:

$$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$$

E escolhemos 5 pedras ornamentais diferentes entre 15 disponíveis:

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{10! \cdot 5!}$$

Logo, a expressão que representa o total de fantasias com materiais diferentes é:

$$C_6^2 \cdot C_{15}^5 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{15!}{10! \cdot 5!}$$

Resposta: a

4. (ENEM 2018)

Cada estande deve conter 1 carro compacto e 1 caminhonete. Temos 4 carros compactos distintos e 6 caminhonetes distintas.

a. Selecionar 2 carros compactos entre 4 (sem ordem):

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

b. Selecionar 2 caminhonetes entre 6 (sem ordem):

$$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$$

c. Formar os pares entre os carros e caminhonetes: Após selecionar os 2 carros e as 2 caminhonetes, precisamos associar cada carro a uma caminhonete para montar os dois estandes. Como temos 2 carros e 2 caminhonetes, existem $2! = 2$ formas distintas de fazer essa associação.

Por exemplo, se os carros escolhidos forem C_1 e C_2 , e as caminhonetes forem K_1 e K_2 , podemos formar:

- Estande A: C_1 com K_1 , Estande B: C_2 com K_2
- Estande A: C_1 com K_2 , Estande B: C_2 com K_1

d. Organizar os dois estandes (entrada e centro): Mesmo com os pares formados, ainda há duas formas de alocar esses pares nos estandes, já que a ordem dos estandes importa (entrada e centro). Ou seja, temos $2! = 2$ formas de distribuir os pares entre os dois estandes.

Por exemplo:

- Entrada: $C_1 + K_1$, Centro: $C_2 + K_2$
- Entrada: $C_2 + K_2$, Centro: $C_1 + K_1$

Portanto, a expressão que representa a quantidade total de maneiras diferentes de montar os estandes é:

$$C_4^2 \cdot C_6^2 \cdot 2 \cdot 2$$

Resposta: c

CONCLUSÃO

A Análise Combinatória é a área da matemática que estuda métodos para contar e organizar elementos de um conjunto, utilizando técnicas como arranjos, permutações e combinações. Essa disciplina é essencial para calcular o número total de resultados possíveis em diversas situações, facilitando a resolução de problemas que envolvem múltiplas opções.

Já a Probabilidade utiliza esses conceitos combinatórios para calcular a chance de ocorrência de um evento. Para isso, ela considera a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis. Dessa forma, a precisão nos cálculos probabilísticos depende diretamente do domínio da Análise Combinatória.

No contexto dos vestibulares, Análise Combinatória e Probabilidade costumam ser abordadas de forma integrada; dessa maneira, aplicar corretamente os conceitos é bastante importante.

7) PROBABILIDADE

INTRODUÇÃO

A **probabilidade** é o ramo da matemática que estuda a chance de ocorrência de um evento. Em termos simples, ela mede o *quão provável* é que algo aconteça.

CONCEITO CLÁSSICO DE PROBABILIDADE

O **conceito clássico** de probabilidade é utilizado quando todos os *resultados possíveis* são *igualmente prováveis*.

A fórmula é:

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número total de casos possíveis}}$$

onde:

- $P(E)$ é a probabilidade do evento E ,
- os **casos favoráveis** são aqueles que satisfazem o evento desejado,
- os **casos possíveis** são todos os resultados que podem ocorrer. Isso também é chamado de espaço amostral.

Exemplo: Lançamento de um dado

Problema: Qual a probabilidade de sair o número 4 ao lançar um dado comum?

Solução:

- O dado tem 6 faces: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- O número 4 é 1 caso favorável
- Total de casos possíveis: 6

$$P(\text{sair 4}) = \frac{1}{6}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

A **probabilidade condicional** representa a chance de um evento ocorrer *sabendo que outro já aconteceu*. Isso significa que restringimos nosso olhar apenas aos casos em que a condição dada é verdadeira.

Indicamos essa situação com a notação:

$$P(A | B)$$

que se lê: “**probabilidade de A, dado B**” — ou seja, a chance de A ocorrer sabendo que o evento B já ocorreu.

Exemplo: Sorteio de Cartas

Problema: De um baralho comum com 52 cartas, qual a probabilidade de se tirar um **rei**, sabendo que a carta sorteada é **de copas**?

Solução:

Como sabemos que a carta sorteada é de copas, podemos **ignorar todas as outras 39 cartas** que não pertencem ao naipe de copas.

O novo espaço amostral contém apenas as 13 cartas de copas. Dessas 13 cartas:

- Apenas 1 é um rei (o rei de copas),
- As demais 12 não são reis.

Portanto, a probabilidade de a carta ser um rei, *dado que é de copas*, é:

$$P(\text{rei} | \text{copas}) = \frac{1}{13}$$

INTERSEÇÃO DE PROBABILIDADES ("E")

A **interseção de probabilidades** representa a chance de dois ou mais eventos ocorrerem. Essa situação é indicada pela palavra “**e**”.

Utilizamos a notação:

$$P(A \cap B)$$

que se lê: “**probabilidade de A e B**”.

A forma como calculamos essa probabilidade depende da relação entre os eventos:

- Se os eventos são **independentes** (ou seja, a ocorrência de um não afeta o outro), usamos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Se os eventos são **dependentes** (ou seja, a ocorrência de um afeta o outro), usamos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Exemplo 1: Urna Com Reposição (Eventos Independentes)

Problema: Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. Retiramos uma bola, anotamos a cor e devolvemos à urna. Depois, retiramos outra bola. Qual a probabilidade de sair uma bola vermelha **e depois** outra bola vermelha?

Solução:

- $P(1^{\text{a}} \text{ vermelha}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- Como houve **reposição**, a 2ª retirada é independente da 1ª:
- $P(2^{\text{a}} \text{ vermelha}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- Como queremos vermelha **e** vermelha:

$$P(1^{\text{a}} \text{ e } 2^{\text{a}} \text{ vermelha}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 2: Urna Sem Reposição (Eventos Dependentes)

Problema: Em uma urna com 5 bolas vermelhas e 5 bolas azuis, retiramos duas bolas sucessivamente. Qual a probabilidade de sair uma bola vermelha **e depois** outra bola vermelha?

Solução:

- $P(1^{\text{a}} \text{ vermelha}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- Como a 1ª bola não foi devolvida, restam 4 vermelhas em 9:

- $P(2^{\text{a}} \text{ vermelha} \mid 1^{\text{a}} \text{ vermelha}) = \frac{4}{9}$
- Como queremos vermelha e vermelha:

$$P(1^{\text{a}} \text{ e } 2^{\text{a}} \text{ vermelha}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

Observação: Neste segundo exemplo, os eventos **não são independentes**, pois a retirada da primeira bola altera a composição da urna e, portanto, influencia a segunda retirada.

UNIÃO DE PROBABILIDADES ("OU")

A **união de probabilidades** representa a chance de que **pelo menos um entre dois ou mais eventos aconteça**. Essa situação é indicada pela palavra “ou”.

Utilizamos a notação:

$$P(A \cup B)$$

que se lê: “**probabilidade de A ou B**”.

A fórmula depende do tipo de relação entre os eventos:

- Se os eventos são **excluentes** (não podem ocorrer ao mesmo tempo), usamos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Se os eventos **não são excluentes** (podem ocorrer juntos), usamos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo 1: Alunos em cursos distintos (eventos excluentes)

Problema: Em uma escola com 100 alunos, 40 estudam matemática, 30 estudam biologia, e nenhum aluno estuda os dois cursos. Se selecionarmos um aluno aleatoriamente, qual a probabilidade de ele estudar matemática **ou** biologia?

Solução:

- $P(\text{matemática}) = \frac{40}{100}$
- $P(\text{biologia}) = \frac{30}{100}$
- Como nenhum aluno estuda os dois cursos, os eventos são **excludentes**:

$$P(\text{matemática ou biologia}) = \frac{40}{100} + \frac{30}{100} = \frac{70}{100} = 0,7$$

Exemplo 2: Alunos em cursos sobrepostos (eventos não excludentes)

Problema: Em outra escola com 100 alunos, 40 estudam matemática, 30 estudam biologia, e 10 estudam os dois cursos. Qual a probabilidade de, ao escolhermos um aluno aleatoriamente, ele estudar matemática **ou** biologia?

Solução:

- $P(\text{matemática}) = \frac{40}{100}$
- $P(\text{biologia}) = \frac{30}{100}$
- $P(\text{matemática e biologia}) = \frac{10}{100}$
- Como os eventos não são excludentes:

$$P(\text{matemática ou biologia}) = \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{10}{100} = \frac{60}{100} = 0,6$$

Solução (sem usar a fórmula):

- Há 10 alunos que estudam **tanto matemática quanto biologia**.
- Como 40 estudam matemática no total, então **30 estudam só matemática**.
- Como 30 estudam biologia no total, então **20 estudam só biologia**.
- Então:
Total que estudam matemática ou biologia = 30 + 10 + 20 = 60
- Logo:

$$P(\text{matemática ou biologia}) = \frac{60}{100} = 0,6$$

PROBABILIDADE COMPLEMENTAR ("NÃO SER")

A **probabilidade complementar** representa a chance de que um evento **não ocorra**. Essa situação é indicada pela palavra “**não**”.

Utilizamos a notação:

$$P(\bar{A}) \quad \text{ou} \quad P(\text{não } A)$$

que se lê: “**probabilidade de não A**”.

A fórmula é simples:

$$P(\text{não } A) = 1 - P(A)$$

Exemplo 1: Evento simples e seu complementar

Problema: A probabilidade de um aluno passar em uma prova é de 0,8. Qual a probabilidade de ele **não passar**?

Solução:

- $P(\text{passar}) = 0,8$
- $P(\text{não passar}) = 1 - 0,8 = 0,2$

Exemplo 2: Complementar como atalho no cálculo

Problema: Uma moeda honesta é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de sair **pelo menos uma cara**?

Solução:

É mais fácil calcular o complementar: **nenhuma cara** (ou seja, todas as jogadas resultarem em coroa), e depois subtrair de 1.

- A probabilidade de sair coroa em uma jogada é $\frac{1}{2}$
- A probabilidade de sair 3 coroas seguidas é:

$$P(\text{nenhuma cara}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- Logo, a probabilidade de sair **pelo menos uma cara** é:

$$P(\text{pelo menos uma cara}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

EXERCÍCIOS

1. Em um saco com 6 **livros de ficção**, 4 **livros de não-ficção** e 2 **revistas**, qual a probabilidade de, ao retirar um item aleatoriamente, ele ser **um livro de não-ficção**?

2. Em uma escola com 200 alunos, 120 são meninas e 80 são meninos. Sabemos que 30 meninas participam do time de vôlei da escola. Qual a probabilidade de, ao escolhermos uma menina aleatoriamente, ela estar no time de vôlei?

3. Você precisa formar um número de dois dígitos. O primeiro dígito é escolhido aleatoriamente entre os números de 0 a 9 e o segundo dígito também é escolhido aleatoriamente entre os números de 0 a 9. Qual é a probabilidade de formar o número **35**?

4. Em uma caixa com 12 peças, 4 são de madeira, 5 são de plástico e 3 são de metal. Se retirarmos 3 peças da caixa sem reposição, qual a probabilidade de escolher **duas peças de madeira e uma de plástico**?

5. Em uma festa, 50 pessoas estão presentes. 30 pessoas estão usando roupas vermelhas, 15 estão usando roupas azuis e 5 estão usando roupas verdes. Qual a probabilidade de, ao escolhermos uma pessoa aleatoriamente, ela estar usando roupas **vermelhas ou azuis**?

6. Em uma escola com 42 professores, 15 são especialistas em Matemática, 18 são especialistas em Física, e 8 são especialistas nas duas áreas (Matemática e Física). Qual a probabilidade de, ao escolhermos um professor aleatoriamente, ele ser especialista **em Matemática ou Física**?

7. A probabilidade de chover em uma cidade em um determinado dia é $P(\text{chuva}) = 0.76$. Qual a probabilidade de **não chover** nesse dia?

8. Em um teste com 5 questões, cada questão tem 4 alternativas (A, B, C e D), e o aluno escolhe aleatoriamente uma alternativa para cada questão. Qual a probabilidade de o aluno acertar **pelo menos uma questão**?

9. Em um jogo com 16 letras, sendo 5 letras **A**, 6 letras **B** e 5 letras **C**, qual a probabilidade de, ao retirar duas letras aleatoriamente, ambas as letras serem **iguais**?

EXERCÍCIO DESAFIO

Sorteio de um livro - UERJ 2023

Para fazer o sorteio de um livro, quatro amigos colocaram três bolas brancas e duas pretas em uma caixa. Decidiram que o primeiro a retirar uma bola preta ficará com o livro. Na ordem alfabética de seus nomes, cada um retira uma bola, ao acaso, sem devolvê-la à caixa. A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é igual a:

- A. 10%
- B. 20%
- C. 30%
- D. 40%

Calçados - ENEM

O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5, e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36, a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{5}$
- C. $\frac{2}{5}$
- D. $\frac{5}{7}$
- E. $\frac{5}{14}$

Restaurante - UERJ 2022

Um restaurante oferece descontos sobre o total do consumo com base na sorte do cliente ao lançar um dado que possui uma face vermelha e cinco faces brancas. Após lançar o dado duas vezes, um cliente receberá desconto se a face vermelha ficar voltada para cima pelo menos uma vez. A probabilidade de um cliente receber um desconto na sua conta é igual a:

- A. $\frac{7}{18}$
- B. $\frac{11}{18}$
- C. $\frac{7}{36}$
- D. $\frac{11}{36}$

Senha - ENEM 2023

Problema: Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

1. Algarismos de 0 a 9;
2. 26 letras minúsculas do alfabeto;
3. 26 letras maiúsculas do alfabeto;
4. 6 caracteres especiais !, @, #, \$, , &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário:

- Tipo I: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;
- Tipo II: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;
- Tipo III: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1 , p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o:

- A. Tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.
- B. Tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.
- C. Tipo II, pois tem maior quantidade de letras.
- D. Tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$.
- E. Tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1. O total de itens no saco é:

$$6 + 4 + 2 = 12$$

A probabilidade de tirar um **livro de não-ficção** é:

$$P(\text{livro de não-ficção}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2. A probabilidade de escolher uma **menina do time de vôlei** é dada por:

$$P(\text{menina do time de vôlei}) = \frac{\text{número de meninas no time de vôlei}}{\text{número total de meninas}} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

3. A probabilidade de escolher o primeiro dígito como 3 é $\frac{1}{10}$ (pois qualquer número de 0 a 9 pode ser escolhido). A probabilidade de escolher o segundo dígito como 5 também é $\frac{1}{10}$. Portanto, a probabilidade de formar o número **35** é:

$$P(\text{número 35}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

4. Primeiro, calculamos a probabilidade de tirar **duas peças de madeira e uma de plástico**.

1. A probabilidade de tirar a primeira peça de madeira é $\frac{4}{12}$. 2. A probabilidade de tirar a segunda peça de madeira é $\frac{3}{11}$, já que uma peça de madeira foi retirada. 3. A probabilidade de tirar uma peça de plástico é $\frac{5}{10}$, já que uma peça foi retirada.

Logo, a probabilidade total é:

$$P(\text{duas de madeira e uma de plástico}) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}$$

5. Neste caso, as roupas vermelhas e azuis são eventos **mutuamente exclusivos**, ou seja, uma pessoa não pode estar usando roupas vermelhas e azuis ao mesmo tempo. Portanto, usamos a fórmula da união de eventos mutuamente exclusivos:

$$P(\text{vermelhas ou azuis}) = P(\text{vermelhas}) + P(\text{azuis}) = \frac{30}{50} + \frac{15}{50} = \frac{45}{50} = 0.9$$

6. Aqui, temos eventos **não mutuamente exclusivos**, pois alguns professores são especialistas nas duas áreas. Portanto, usamos a fórmula da união de eventos não exclusivos:

$$P(\text{Matemática ou Física}) = P(\text{Matemática}) + P(\text{Física}) - P(\text{Matemática e Física})$$

$$P(\text{Matemática ou Física}) = \frac{15}{42} + \frac{18}{42} - \frac{8}{42} = \frac{25}{42}$$

7. A probabilidade de **não chover** é o complementar da probabilidade de chover:

$$P(\text{não chover}) = 1 - P(\text{chuva}) = 1 - 0.76 = 0.24$$

8. Aqui, a probabilidade de acertar pelo menos uma questão é o complemento de não acertar nenhuma questão. A probabilidade de não acertar uma questão é $\frac{3}{4}$, então a probabilidade de não acertar nenhuma das 5 questões é $\left(\frac{3}{4}\right)^5$. A probabilidade de acertar pelo menos uma questão é:

$$P(\text{pelo menos uma}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

9. Usamos a fórmula para calcular a probabilidade de tirar duas letras iguais, somando as probabilidades para cada tipo de letra (A, B e C).

○ A probabilidade de tirar **duas letras A**:

$$P(2 \text{ A}) = \frac{5}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{20}{240} = \frac{1}{12}$$

○ A probabilidade de tirar **duas letras B**:

$$P(2 \text{ B}) = \frac{6}{16} \times \frac{5}{15} = \frac{30}{240} = \frac{1}{8}$$

○ A probabilidade de tirar **duas letras C**:

$$P(2 \text{ C}) = \frac{5}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{20}{240} = \frac{1}{12}$$

○ Somando as probabilidades de tirar **duas letras iguais**:

$$P(2 \text{ letras iguais}) = P(2 \text{ A}) + P(2 \text{ B}) + P(2 \text{ C})$$

$$P(2 \text{ letras iguais}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$$

Para somar essas frações, vamos achar o mínimo denominador comum (MDC):

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{2}{24} + \frac{3}{24} + \frac{2}{24} = \frac{7}{24}$$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DESAFIO

Sorteio de um Livro - UERJ 2023

O total de bolas na caixa é $3 + 2 = 5$. A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é um caso em que ele precisa retirar uma bola preta, e as duas primeiras bolas retiradas precisam ser brancas.

1. A probabilidade de o primeiro amigo tirar uma bola branca é $\frac{3}{5}$. 2. A probabilidade de o segundo amigo tirar outra bola branca é $\frac{2}{4}$, já que uma bola branca foi retirada. 3. A probabilidade de o terceiro amigo tirar uma bola preta é $\frac{2}{3}$, já que restam duas bolas pretas e três bolas no total.

Logo, a probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta é:

$$P(\text{terceiro amigo}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Conclusão: A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta é 20%.

Restaurante - UERJ 2022

A probabilidade de a face vermelha não aparecer em nenhuma das duas jogadas é a seguinte: - A probabilidade de a face vermelha não sair no primeiro lançamento é $\frac{5}{6}$. - A probabilidade de a face vermelha não sair no segundo lançamento também é $\frac{5}{6}$.

A probabilidade de a face vermelha não sair em nenhum dos dois lançamentos é:

$$P(\text{nenhuma face vermelha}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Agora, a probabilidade de sair pelo menos uma face vermelha é o complementar:

$$P(\text{pelo menos uma vermelha}) = 1 - P(\text{nenhuma face vermelha}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Conclusão: A probabilidade de um cliente receber desconto na sua conta é $\frac{11}{36}$.

Calçados - ENEM

1. O total de funcionárias com calçado maior que 36 é dado pela soma das funcionárias que têm calçado 37, 38 e 39:

$$1 + 10 + 3 = 14$$

2. O número de funcionárias que calçam 38,0 é 10.

3. Usamos a probabilidade condicional para calcular a chance de uma funcionária calçar 38,0, dado que ela tem calçado maior que 36:

$$P(\text{calçar 38} \mid \text{calçado maior que 36}) = \frac{\text{número de funcionárias com calçado 38}}{\text{número total de funcionárias com calçado maior que 36}}$$

$$P(\text{calçar 38} \mid \text{calçado maior que 36}) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Conclusão: A probabilidade de uma funcionária calçar 38,0, dado que ela tem calçado maior que 36, é $\frac{5}{7}$.

Senha - ENEM 2023

Vamos calcular as probabilidades de descoberta de cada tipo de senha.

1. **Tipo I:** formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os 62 caracteres possíveis (10 algarismos, 26 letras minúsculas, 26 letras maiúsculas). A probabilidade de acertar essa senha na primeira tentativa é:

$$P_1 = \frac{1}{62 \times 61 \times 60 \times 59}$$

2. **Tipo II:** formada por 5 caracteres distintos, iniciando por 3 letras, seguidas por 1 algarismo e 1 caractere especial. A quantidade de maneiras de formar essa senha é:

$$P_2 = \frac{1}{26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 6}$$

3. **Tipo III:** formada por 6 caracteres distintos, iniciando por 2 letras, seguidas por 2 algarismos e 2 caracteres especiais. A quantidade de maneiras de formar essa senha é:

$$P_3 = \frac{1}{26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 6 \times 5}$$

Comparando as probabilidades, vemos que $P_1 > P_2 > P_3$, já que o número de combinações para a senha tipo III é maior.

Conclusão: O tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$.

8) ESTATÍSTICA

INTRODUÇÃO

No nosso estudo de Estatística, vamos nos concentrar em dois grupos fundamentais de medidas: as **medidas de tendência central** e as **medidas de dispersão**.

Elas são amplamente utilizadas em pesquisas nas áreas de **ciências exatas, biológicas e também nas ciências humanas**, como sociologia, psicologia, educação e economia. Por isso, dominar esse conteúdo é fundamental para qualquer área de estudo, sendo um dos pilares da leitura crítica de dados no mundo contemporâneo.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

As medidas de tendência central são usadas para representar, com um único valor, o comportamento geral de um conjunto de dados. Elas são essenciais para resumir informações de forma simples e eficiente.

MÉDIA SIMPLES

A **média aritmética simples** é obtida somando todos os valores de um conjunto de dados e dividindo o total pela quantidade de elementos. Representa um valor central típico do conjunto.

$$\text{Média} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Exemplo 1: Conjunto de Números

Considere as idades de cinco estudantes: 15, 17, 18, 16 e 14 anos. Qual é a média das idades?

$$\text{Média} = \frac{15 + 17 + 18 + 16 + 14}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

MÉDIA PONDERADA

A **média ponderada** é utilizada quando os valores possuem pesos diferentes. Cada valor é multiplicado por seu respectivo peso, e o total das multiplicações é dividido pela soma dos pesos.

$$\text{Média Ponderada} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Exemplo 1: Provas com Pesos Diferentes

Um aluno fez duas provas. Na primeira, tirou nota 6 (peso 2) e na segunda, tirou nota 8 (peso 3). Qual é a média final?

Resolução:

$$\text{Média Ponderada} = \frac{6 \times 2 + 8 \times 3}{2 + 3} = \frac{12 + 24}{5} = \frac{36}{5} = 7,2$$

Exemplo 2: Tabela com Frequências

Um professor anotou as idades dos alunos de uma turma do Ensino Médio. Qual é a **média de idade** dos alunos da turma?

Idade	Número de alunos
14	2
15	5
16	6
17	4

Resolução:

$$\text{Média Ponderada} = \frac{(14 \times 2) + (15 \times 5) + (16 \times 6) + (17 \times 4)}{2 + 5 + 6 + 4} = \frac{28 + 75 + 96 + 68}{17} = \frac{267}{17}$$

$$\text{Média Ponderada} \approx 15,7$$

MEDIANA

A **mediana** é o valor central de um conjunto de dados ordenado.

- Se o número de dados for **ímpar**, a mediana é o valor que está no meio.
- Se o número de dados for **par**, a mediana é a média dos dois valores centrais.

A mediana é uma medida de tendência central que não é afetada por valores extremos (outliers), sendo muito usada em contextos sociais e econômicos.

Exemplo 1: Número Ímpar de Elementos

Durante uma competição de xadrez, as pontuações abaixo foram obtidas por 7 jogadores. Qual a mediana das pontuações?

3,0, 2,5, 4,0, 5,5, 2,0, 4,5, 3,5

Resolução:

Passo 1: Ordenar os valores:

2,0, 2,5, 3,0, 3,5, 4,0, 4,5, 5,5

Passo 2: Como há 7 valores, a mediana é o 4º valor:

$$\text{Mediana} = 3,5$$

Exemplo 2: Número Par de Elementos

As idades (em anos) de 8 crianças que participaram de uma oficina foram anotadas abaixo. Qual a mediana das idades?

6, 7, 9, 8, 6, 10, 7, 8

Resolução:

Passo 1: Ordenar os valores:

6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10

Passo 2: Como há 8 valores, a mediana será a média entre o 4º e o 5º:

$$\text{Mediana} = \frac{7 + 8}{2} = 7,5$$

Exemplo 3: Tabela de Frequências

O número de livros lidos por 50 estudantes em um trimestre foi registrado na tabela abaixo. Qual a mediana do número de livros lido?

Livros	Número de estudantes
0	2
1	5
2	10
3	12
4	9
5	7
6	3
7	2

Resolução:

Passo 1: Calcular a frequência acumulada (isto é, a soma progressiva das quantidades de alunos):

- 0 livros: 2 alunos (acumulado: 2)
- 1 livro: 5 alunos ($2 + 5 = 7$)
- 2 livros: 10 alunos ($7 + 10 = 17$)
- 3 livros: 12 alunos ($17 + 12 = 29$)
- 4 livros: 9 alunos ($29 + 9 = 38$)
- 5 livros: 7 alunos ($38 + 7 = 45$)
- 6 livros: 3 alunos ($45 + 3 = 48$)
- 7 livros: 2 alunos ($48 + 2 = 50$)

Passo 2: O total de alunos é 50, um número par. Logo, a mediana estará entre o **25º** e o **26º** alunos da lista ordenada.

Agora vamos observar em qual classe (número de livros) estão esses dois alunos:

- A frequência acumulada até “2 livros” é 17, ou seja, os 17 primeiros alunos leram no máximo 2 livros.

- A frequência acumulada até “3 livros” é 29, ou seja, do 18º até o 29º alunos leram exatamente 3 livros.

Conclusão: Tanto o 25º quanto o 26º aluno estão dentro da classe “3 livros”.

$$\text{Mediana} = 3$$

MODA

A **moda** é o valor que mais se repete em um conjunto de dados. Um conjunto pode ter:

- uma única moda (unimodal),
- duas modas (bimodal),
- ou mais de duas (multimodal).

Exemplo 1: Categorias e Frequências

Em uma pesquisa sobre os meios de transporte utilizados para ir ao trabalho, foram obtidos os seguintes resultados. Qual é a moda desse conjunto de dados?

Transporte	
==	Quantidade==
Ônibus	12
Carro	7
Bicicleta	5
Metrô	3

Resolução:

A moda é **Ônibus**, pois foi o transporte mais citado (12 vezes). Se quiser, posso salvar esse conteúdo em um .tex ou gerar o PDF direto com isso. Deseja o arquivo?

MEDIDAS DE DISPERSÃO

As **medidas de dispersão** indicam o grau de *variabilidade* de um conjunto de dados em relação à sua média. Elas são fundamentais para entender o quão concentrados ou espalhados estão os valores. Dentre as principais medidas, destacamos a **amplitude**, a **variância** e o **desvio padrão**.

AMPLITUDE

A **amplitude** é a medida de dispersão mais simples. Ela é calculada pela diferença entre o maior e o menor valor de um conjunto de dados:

$$\text{Amplitude} = \text{Valor máximo} - \text{Valor mínimo}$$

Essa medida mostra o intervalo total dos dados. No entanto, como considera apenas os extremos, ela pode ser muito sensível a valores fora do padrão (outliers), não refletindo adequadamente a distribuição geral.

Exemplo: Medida de Amplitude

Uma fábrica produziu 5 peças metálicas de mesmo tipo em dois turnos diferentes. Os comprimentos das peças (em centímetros) foram medidos em cada turno. Qual dos dois turnos apresentou maior variação nos comprimentos das peças?

- **Turno A:** 9,8;0;9;1;0
- **Turno B:** 9,5;5;6;4;2

Resolução:

- Turno A: Amplitude = $10,1 - 9,8 = 0,3$
- Turno B: Amplitude = $10,6 - 9,4 = 1,2$

O **Turno B** apresentou maior **amplitude**, indicando maior variação entre as peças produzidas — o que pode sinalizar menor controle de qualidade.

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

A **variância** e o **desvio padrão** são duas formas de expressar a mesma ideia: o grau de *dispersão* dos dados em relação à média.

- A **variância** calcula a média dos quadrados dos desvios em relação à média. Seu resultado está em unidades ao quadrado (como cm^2 , anos^2 etc.).
- O **desvio padrão** é a **raiz quadrada da variância** e, por isso, está na **mesma escala dos dados**, o que torna sua interpretação mais intuitiva e prática.

Ambas medidas indicam o quanto os valores se afastam da média. Quanto maiores esses valores, mais espalhados estão os dados. Quando são próximos de zero, significa que os dados estão mais concentrados em torno da média.

Exemplo: Medida de Instabilidade

Dois atletas arremessaram um dardo cinco vezes. Ambos tiveram médias parecidas, mas com comportamentos diferentes quanto à variação dos arremessos. Qual dos atletas tem os resultados mais instáveis?

- **Atleta A:** 50, 52, 48, 51, 49 (Desvio padrão: 1,41)
- **Atleta B:** 30, 60, 45, 55, 40 (Desvio padrão: 11,40)

Resolução:

Apesar das médias serem semelhantes, o **Atleta B** apresentou um **desvio padrão muito maior**, indicando maior variação entre os arremessos. Logo, ele é o mais **instável** ou **imprevisível**.

EXERCÍCIOS

1. As notas de um estudante em cinco atividades foram: 7, 8, 6, 9 e 10. Qual foi a média das notas obtidas?
2. O número de filhos por família em uma comunidade foi registrado da seguinte forma:

Número de filhos	Quantidade de famílias
0	4
1	8
2	10
3	6
4	2

Qual é o número médio de filhos por família?

3. Uma residência tem três aparelhos que consomem diferentes quantidades de energia elétrica por dia e funcionam por diferentes durações:

- Aparelho A: consome 1,5 kWh por hora e é usado por 2 horas
- Aparelho B: consome 2,0 kWh por hora e é usado por 3 horas
- Aparelho C: consome 0,5 kWh por hora e é usado por 1 hora

Qual é o consumo médio ponderado de energia desses aparelhos, considerando o tempo de uso como peso?

4. Os tempos (em segundos) que um corredor levou para concluir 9 voltas foram: 52, 49, 51, 53, 50, 50, 52, 54, 48. Qual foi a mediana dos tempos?

5. As idades, em anos, de 6 participantes de um curso foram: 22, 25, 24, 26, 23, 27. Qual é a mediana dessas idades?

6. Uma pesquisa foi realizada para saber quantas horas por semana os alunos de uma turma dedicam aos estudos fora da escola:

Horas de estudo	Número de alunos
0	2
1	4
2	8
3	11
4	6
5	3

Qual foi a mediana do número de horas de estudo semanal dos alunos?

7. Em uma turma, o número de questões que os alunos acertaram em um teste foi:

7, 5, 6, 8, 5, 9, 5, 7, 6

Qual é a moda desse conjunto de dados?

8. O número de vendas de dois vendedores ao longo de 5 semanas foram:

o **Vendedor A:** 80, 82, 79, 81, 78 (Desvio padrão: 1,48)

o **Vendedor B:** 75, 90, 60, 85, 70 (Desvio padrão: 11,18)

Qual vendedor demonstrou maior regularidade nas vendas?

9. O número de unidades com defeito detectadas por dois setores de uma fábrica ao longo de 5 dias foi:

o **Setor A:** 3, 4, 2, 3, 3

o **Setor B:** 1, 7, 2, 6, 5

Qual dos dois setores apresentou maior variação no número de defeitos diários, considerando a amplitude?

EXERCÍCIOS DESAFIO

1. **(UERJ – RJ – 2019)** Em um torneio de futebol com 40 jogos, verificou-se a seguinte distribuição do número de cartões amarelos recebidos por um time durante os jogos:

Quantidade de cartões amarelos por jogo	Número de jogos
0	4
1	16
2	10
3	4
4	6

A média de cartões amarelos por jogo é igual a:

- a. 1,2
b. 1,4

- c. 1,6
- d. 1,8

2. **(ENEM – 2023)** Restaurantes geralmente se deparam com o problema de definir a quantidade de alimentos a serem preparados para cada dia. Diante desse problema, o gerente de um restaurante anotou as quantidades de clientes que almoçaram em seu restaurante durante os 10 primeiros dias do mês e registrou esses dados, obtendo este gráfico:



Ele considerou a moda da distribuição das quantidades de clientes como uma boa medida para dimensionar a quantidade de alimentos a serem preparados diariamente.

O valor da moda dessa distribuição é:

- a. 90
- b. 91
- c. 93
- d. 94
- e. 97

3. **(ENEM – 2023 – PPL)** A amplitude é uma medida estatística que detecta a variabilidade dos dados de uma amostra. Ela pode ser utilizada como critério de qualidade da produção na indústria de peças, indicando, por exemplo, a necessidade de descarte de um lote defeituoso.

Uma fábrica analisou cinco unidades de cada um dos cinco lotes da produção de um tipo de peça que, por projeto, devem ter comprimento igual a 10 cm. As medidas, em centímetros, dessas unidades estão distribuídas a seguir:

- Lote I: 9,80; 10,30; 10,30; 10,30; 10,30

- Lote II: 10,55; 10,58; 10,58; 10,60; 10,60
- Lote III: 9,80; 9,80; 10,00; 10,00; 10,20
- Lote IV: 9,90; 9,90; 9,90; 10,20; 10,20
- Lote V: 9,30; 9,30; 9,50; 9,50; 9,50

Foi determinado o descarte do lote que apresentasse a maior amplitude.

De acordo com o critério adotado, a fábrica descartará o lote:

- a. I
- b. II
- c. III
- d. IV
- e. V

4. **(ENEM – 2023 – PPL – 2ª Aplicação)** O diabetes mellitus é uma doença crônica caracterizada pelo aumento de glicose no sangue. O Sistema de Cadastramento e Acompanhamento de Hipertensos e Diabéticos destina-se ao cadastramento de portadores atendidos no SUS. A tabela mostra o número de pessoas com diabetes mellitus tipo 2, em 2012, em diferentes macrorregiões de saúde de Minas Gerais:

Macrorregião de saúde	Número de portadores
Sul	714
Centro-Sul	186
Centro	448
Jequitinhonha	36
Oeste	460
Leste	255
Sudeste	110
Norte	45
Noroeste	86
Leste do Sul	47
Nordeste	39
Triângulo do Sul	153
Triângulo do Norte	128

A mediana do número de portadores de diabetes mellitus tipo 2 das macrorregiões é:

- a. 110,00
- b. 119,00
- c. 128,00
- d. 182,50
- e. 208,23

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1. Média das notas:

$$\text{Média} = \frac{7 + 8 + 6 + 9 + 10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

2. Média de filhos por família:

$$\begin{aligned}\text{Média} &= \frac{(0 \times 4) + (1 \times 8) + (2 \times 10) + (3 \times 6) + (4 \times 2)}{4 + 8 + 10 + 6 + 2} \\ \text{Média} &= \frac{0 + 8 + 20 + 18 + 8}{30} = \frac{54}{30} = 1,8\end{aligned}$$

3. Consumo médio ponderado:

$$\begin{aligned}\text{Média ponderada} &= \frac{(1,5 \times 2) + (2,0 \times 3) + (0,5 \times 1)}{2 + 3 + 1} \\ \text{Média ponderada} &= \frac{3,0 + 6,0 + 0,5}{6} = \frac{9,5}{6} \approx 1,58 \text{ kWh}\end{aligned}$$

4. Mediana dos tempos (9 voltas): Ordenando: 48, 49, 50, 50, 51, 52, 52, 53, 54
Como há 9 valores, a mediana é o 5º valor:

$$\text{Mediana} = 51$$

5. Mediana das idades (6 valores): Ordenando: 22, 23, 24, 25, 26, 27 Mediana =
média dos dois valores centrais:

$$\text{Mediana} = \frac{24 + 25}{2} = 24,5$$

6. Frequência acumulada:

- 0 → 2
- 1 → 2 + 4 = 6
- 2 → 6 + 8 = 14
- 3 → 14 + 11 = 25
- 4 → 25 + 6 = 31
- 5 → 31 + 3 = 34

Total de alunos: 34 Mediana está entre o 17º e o 18º aluno → classe 3 horas

Mediana = 3

7. Moda: Valores: 7, 5, 6, 8, 5, 9, 5, 7, 6 Frequência:

○ 5 → 3 vezes

○ 6 → 2 vezes

○ 7 → 2 vezes

○ 8 e 9 → 1 vez

Moda = 5

8. Vendedor com maior regularidade: Comparando os desvios padrão:

○ Vendedor A: 1,48

○ Vendedor B: 11,18

Resposta: Vendedor A foi mais regular, pois teve menor desvio padrão.

9. Vamos calcular a amplitude para cada setor:

○ **Setor A:** valores = 2, 3, 3, 3, 4

$$\text{Amplitude} = 4 - 2 = 2$$

○ **Setor B:** valores = 1, 2, 5, 6, 7

$$\text{Amplitude} = 7 - 1 = 6$$

Conclusão: O **Setor B** apresentou uma amplitude maior (6), o que indica maior variação no número de defeitos ao longo dos dias. Já o **Setor A** teve uma variação menor (2), indicando maior regularidade.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DESAFIO

1. (UERJ – RJ – 2019)

Vamos calcular a média ponderada dos cartões amarelos por jogo:

$$\begin{aligned} \text{Média} &= \frac{(0 \times 4) + (1 \times 16) + (2 \times 10) + (3 \times 4) + (4 \times 6)}{40} \\ &= \frac{0 + 16 + 20 + 12 + 24}{40} = \frac{72}{40} = 1,8 \end{aligned}$$

Resposta: (D)

2. (ENEM – 2023)

A moda é o valor que mais se repete. Observando o gráfico (imagem do enunciado), vemos que o valor com maior frequência é **94**, pois ele aparece em 3 dias.

Resposta: (D)

3. (ENEM – 2023 – PPL)

Vamos calcular a amplitude de cada lote:

- Lote I: $10,30 - 9,80 = 0,50$
- Lote II: $10,60 - 10,55 = 0,05$
- Lote III: $10,20 - 9,80 = 0,40$
- Lote IV: $10,20 - 9,90 = 0,30$
- Lote V: $9,50 - 9,30 = 0,20$

O lote com maior amplitude é o **Lote I**.

Resposta: (A)

4. (ENEM – 2023 – PPL – 2ª Aplicação)

Vamos organizar os valores em ordem crescente:

36, 39, 45, 47, 86, 110, 128, 153, 186, 255, 448, 460, 714

Temos 13 valores. A mediana será o 7º valor:

$$\text{Mediana} = 128$$

Resposta: (C)

9) JUROS

INTRODUÇÃO

Neste material, estudaremos os principais conceitos relacionados aos **juros**, com foco nas diferenças e aplicações do **juro simples** e do **juro composto**. Essas ferramentas matemáticas estão presentes em diversas situações do cotidiano, como investimentos, financiamentos, empréstimos e contas de poupança. Compreender como os juros funcionam ao longo do tempo é fundamental para interpretar cenários financeiros e tomar decisões com maior segurança.

JUROS SIMPLES

O **juro simples** é aquele calculado somente sobre o valor **inicial** do capital aplicado (ou emprestado), não havendo acréscimo sobre os juros já acumulados ao longo do tempo.

A fórmula do juro simples é:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

onde:

- J : juro obtido
- C : capital inicial
- i : taxa de juro (ao mês, ano, etc.)
- t : tempo (no mesmo período da taxa)

O **montante final** (valor total acumulado) é dado por:

$$M = C + J = C(1 + i \cdot t)$$

Exemplo 1

Um capital de R\$ 1.000,00 é aplicado a uma taxa de 2% ao mês durante 5 meses. Qual será o **juro simples obtido** e o **montante final** ao final desse período?

Solução:

$$C = 1000, \quad i = 0,02, \quad t = 5$$

$$J = C \cdot i \cdot t = 1000 \cdot 0,02 \cdot 5 = 100$$

$$M = C + J = 1000 + 100 = 1100$$

Resposta: O juro será de **R\$ 100,00** e o montante final será de **R\$ 1.100,00**.

Exemplo 2

Um empréstimo de R\$ 2.500,00 foi contratado com taxa de 1,5% ao mês, no regime de juros simples. Sabendo que o valor final pago foi de R\$ 2.800,00, em quanto tempo esse valor foi alcançado?

Solução:

$$C = 2500, \quad i = 0,015, \quad M = 2800$$

Primeiro, calculamos o juro:

$$J = M - C = 2800 - 2500 = 300$$

Agora usamos a fórmula do juro simples para encontrar o tempo:

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 300 = 2500 \cdot 0,015 \cdot t \Rightarrow t = \frac{300}{2500 \cdot 0,015} = \frac{300}{37,5} = 8$$

Resposta: O empréstimo foi quitado após **8 meses**.

JUROS COMPOSTOS

O **juro composto** é calculado sobre o montante acumulado a cada período, ou seja, os juros incidem não apenas sobre o capital inicial, mas também sobre os juros dos períodos anteriores. Por isso, é também conhecido como *juros sobre juros*.

Para entender a fórmula, observe o que acontece com um capital C aplicado a uma taxa de i por período:

- Após o **1º período**, o montante é $C(1 + i)$
- Após o **2º período**, o juro incide sobre o novo montante: $C(1 + i)^2$
- Após o **3º período**, temos $C(1 + i)^3$
-

Seguindo esse padrão, após t períodos, o montante é:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

onde:

- M : montante final (capital + juros)

- C : capital inicial
- i : taxa de juro por período
- t : tempo (número de períodos)

O juro acumulado pode ser obtido por:

$$J = M - C$$

Exemplo 1

Um capital de R\$ 1.000,00 é aplicado durante 3 anos, em um investimento no regime de **juros compostos**, com taxa de 10% ao ano. Qual será o **juro obtido** e o **montante final** ao final do período?

Solução:

$$C = 1000, \quad i = 0,10, \quad t = 3$$

Calculando o montante:

$$M = C \cdot (1 + i)^t = 1000 \cdot (1,10)^3 = 1000 \cdot 1,331 = 1331$$

Calculando o juro obtido:

$$J = M - C = 1331 - 1000 = 331$$

Resposta: O juro obtido foi de **R\$ 331,00** e o montante final é **R\$ 1.331,00**.

Exemplo 2

Um capital de R\$ 2.000,00 foi aplicado a uma taxa de 5% ao mês. Sabendo que os rendimentos foram acumulados mês a mês e que o montante final foi de R\$ 2.205,00, determine em quantos meses esse valor foi alcançado.

Considere: $\log(1,1025) \approx 0,043$ e $\log(1,05) \approx 0,021$.

Solução:

$$C = 2000, \quad i = 0,05, \quad M = 2205$$

$$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 2205 = 2000 \cdot (1,05)^t$$

$$\frac{2205}{2000} = (1,05)^t \Rightarrow 1,1025 = (1,05)^t$$

Aplicando logaritmos:

$$\log(1,1025) = t \cdot \log(1,05)$$

$$t = \frac{\log(1,1025)}{\log(1,05)} \approx \frac{0,043}{0,021} \approx 2,05$$

Resposta: O valor foi alcançado em aproximadamente **2 meses**.

EXERCÍCIOS

1. Um capital de R\$ 1.500,00 foi aplicado durante 6 meses a uma taxa de 2% ao mês. Calcule o juro obtido e o montante final.
2. Um empréstimo de R\$ 800,00 foi contratado com taxa de juros de 3% ao mês. Sabendo que o valor total a ser pago é de R\$ 956,00, determine o prazo do empréstimo (em meses).
3. Um investidor aplicou R\$ 5.000,00 a uma taxa de 1,2% ao mês. Qual será o valor acumulado após 10 meses?
4. Um capital de R\$ 2.000,00 é aplicado durante 3 meses a uma taxa de 4% ao mês, com *acréscimos mensais acumulados*. Qual será o montante final ao fim desse período?
5. Um valor de R\$ 1.200,00 foi investido por 2 anos a uma taxa de 10% ao ano, com os juros sendo incorporados ao montante ao final de cada ano. Determine o valor final da aplicação.

6. Um capital foi aplicado por 4 meses a uma taxa de 5% ao mês, e os juros se acumularam ao longo do tempo. Sabendo que o montante final foi de R\$ 2.432,05, determine o capital inicialmente investido.

EXERCÍCIOS DESAFIO

1. **(UERJ 2020)** Ao se aposentar aos 65 anos, um trabalhador recebeu seu Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS) no valor de R\$ 50.000,00 e resolveu deixá-lo em uma aplicação bancária, rendendo juros compostos de 4% ao ano, até obter um saldo de R\$ 100.000,00. Se esse rendimento de 4% ao ano não mudar ao longo de todos os anos, o trabalhador atingirá seu objetivo após x anos.

Considere: $\log(1,04) = 0,017$ e $\log 2 = 0,301$.

- a. 10
- b. 14
- c. 18
- d. 22

2. **(UERJ 2017)** Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R\$ 53.240,00.

Calcule o valor, em reais, do capital inicial C .

3. **Unicamp (2015)** Uma compra no valor de R\$ 1.000,00 será paga com uma entrada de R\$ 600,00 e uma mensalidade de R\$ 420,00. A taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a:

- a. 2%
- b. 5%
- c. 8%
- d. 10%

4. **(FGV)** Um capital aplicado a juros simples produz o montante de R\$ 7.200,00 em cinco meses e, em oito meses, esse montante passa a valer R\$ 7.680,00.

Nessas condições, a taxa de juros aplicada a esse capital é de:

- a. 2,20% a.m.

- b. 2,25% a.m.
- c. 2,36% a.m.
- d. 2,44% a.m.
- e. 2,50% a.m.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1. **Solução:** Juro simples.

$$C = 1500, \quad i = 0,02, \quad t = 6$$

$$J = C \cdot i \cdot t = 1500 \cdot 0,02 \cdot 6 = 180 \Rightarrow M = C + J = 1500 + 180 = 1680$$

Resposta: Juro de **R\$ 180,00** e montante final de **R\$ 1.680,00**.

2. **Solução:** Juro simples.

$$C = 800, \quad M = 956, \quad i = 0,03$$

$$J = M - C = 956 - 800 = 156 \Rightarrow J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 156 = 800 \cdot 0,03 \cdot t$$

$$t = \frac{156}{800 \cdot 0,03} = \frac{156}{24} = 6,5$$

Resposta: O prazo do empréstimo é de **6,5 meses**.

3. **Solução:** Juro simples.

$$C = 5000, \quad i = 0,012, \quad t = 10$$

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t) = 5000 \cdot (1 + 0,012 \cdot 10) = 5000 \cdot 1,12 = 5600$$

Resposta: Valor acumulado de **R\$ 5.600,00**.

4. **Solução:** Juros compostos (acréscimos mensais acumulados).

$$C = 2000, \quad i = 0,04, \quad t = 3$$

$$M = C \cdot (1 + i)^t = 2000 \cdot (1,04)^3 = 2000 \cdot 1,124864 = 2249,73$$

Resposta: Montante final de **R\$ 2.249,73**.

5. **Solução:** Juros compostos (incorporação anual).

$$C = 1200, \quad i = 0,10, \quad t = 2$$

$$M = 1200 \cdot (1,10)^2 = 1200 \cdot 1,21 = 1452$$

Resposta: Valor final da aplicação: **R\$ 1.452,00**.

6. **Solução:** Juros compostos (juros acumulados).

$$M = 2432,05, \quad i = 0,05, \quad t = 4$$

$$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 2432,05 = C \cdot (1,05)^4 = C \cdot 1,21550625$$

$$C = \frac{2432,05}{1,21550625} \approx 2000$$

Resposta: Capital inicial de **R\$ 2.000,00**.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DESAFIO

1. **(UERJ 2020)**

Utilizando a fórmula do montante em juros compostos:

$$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 100000 = 50000 \cdot (1,04)^x \Rightarrow 2 = (1,04)^x$$

Aplicando logaritmo dos dois lados:

$$\log 2 = x \cdot \log(1,04) \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log(1,04)} = \frac{0,301}{0,017} \approx 17,7$$

Resposta:

2. **(UERJ 2017)**

Utilizando a fórmula do montante:

$$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 53240 = C \cdot (1,10)^3 = C \cdot 1,331 \Rightarrow C = \frac{53240}{1,331} \approx 40000$$

Resposta: R\$ 40.000,00

3. **Unicamp (2015)**

O valor financiado é R\$ 400,00 (pois R\$ 1000,00 - R\$ 600,00). A mensalidade foi de R\$ 420,00.

Utilizamos a fórmula dos juros simples:

$$J = 420 - 400 = 20, \quad i = \frac{J}{C \cdot t} = \frac{20}{400 \cdot 1} = 0,05 = 5\%$$

Resposta:

4. **(FGV)** A variação do montante entre o 5º e o 8º mês é:

$$J = 7680 - 7200 = 480$$

Esse juro foi obtido em:

$$t = 8 - 5 = 3 \text{ meses}$$

O capital que gerou esse juro é o montante acumulado até o 5º mês:

$$C = 7200$$

Aplicando a fórmula dos juros simples:

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 480 = 7200 \cdot i \cdot 3$$

$$480 = 21600i \Rightarrow i = \frac{480}{21600} = 0,0222 \dots \approx 2,22\%$$

Resposta: A taxa de juros aplicada é aproximadamente **2,22% a.m.**, ou seja, a alternativa mais próxima é a **a**).

Realização:



Patrocínio:



Integração
Metropolitana



Projeto Gráfico:





Programa de
**Capacitação
e Integração
de Lideranças
Sociais**